seria
BAZELE
MATEMATICE
ALE CERCETĂRII
OPERAŢIONALE

APPLIED QUEUEING THEORY

ALEC M. LEE, M.A.

Director of Operaţional Research, Air Canada

The Macmillan Press Limited

London

© Alee M. I.ee 1966

Alee M. Lee

TEORIA AŞTEPTĂRII CU APLICAŢII

Traducere din limba engleză

de dr. VINCENŢIU DUMITRU, ANDREI ALEXIU şi TIBERIU SPIRCU

Editura  **teh**

Bucureşti -
1976

PREFAŢA LA EDIŢIA ROMÂNĂ

Cu toate că n-am vizitat România pînă în prezent, îmi imaginez că sistemele de aşteptare sînt la fel ca oriunde; ca şi canadienii, germanii sau japonezii, probabil că românii sînt la fel de iritaţi de aspectele neplăcute ale sistemelor de aşteptare. De aceea, voi fi foarte mulţumit dacă cele scrise în cartea mea vor ajuta la reducerea inconvenientelor inerente sistemelor de aşteptare.

în ultimii ani articolele şi cărţile avînd ca temă teoria matematică a aşteptării s-au înmulţit în mod alarmant. Totuşi puţine sînt acelea care au dovedit că au o utilitate practică; de aceea n-am considerat necesar să mai adaug referinţe bibliografice. Trebuie însă să scot în evidenţă faptul că în anii care au trecut din momentul scrierii cărţii, tehnicile de simulare au devenit mult mai importante şi mai folositoare decît am presupus atunci. Aceasta se datoreşte doar în parte progresului acestor tehnici în sine, fiind mai mult o consecinţă a tendinţei foarte favorabile a costului calculelor, ea urmare a progresului rapid al tehnologiei echipamentelor de calcul. România, care a făcut din proiectarea şi fabricarea echipamentelor de calcul o componentă semnificativă a dezvoltării ei tehnologice, este bine plasată pentru a fi beneficiara aeestor tendinţe.

ALEG LEE

Ednaston, Derbyahlre Februarie 1976

PREFAŢĂ

Revistele de cercetare operaţională din toată lumea continuă să fie pline cu lucrări legate de teoria firelor de aşteptare, iar un cititor ocazional ar putea să-şi formeze părerea că problemele acestui subiect au fost deja epuizate.

Nu este însă aşa. Majoritatea acestor lucrări îşi au originea, se pare, în zona crepusculară a cercetării academice. în ele sînt explorate curajos misterele modelelor simple ale celor mai familiare procese de aşteptare şi sînt obţinute binecunoscutele proprietăţi ale modelelor clasice î n timp ce aparatul matematic devine din ce în ce mai bine pus la punct, rămîne într-adevăr o dificultate a găsi relatări ale muncii experimentale cu procesele de aşteptare, sau a face observaţii empirice ale acestor procese, sau chiar aplicaţii ale unor teorii existente. Se pare că o mare parte a muncii de cercetare se depune pentru teorie şi o mult mai mică parte pentru aplicaţii.

Există o aparentă inactivitate în aplicaţiile teoriei aşteptării, dar realitatea este alta. Problemele legate de aglomeraţie constituie un sector majorîn care este realizată foarte multă practică de cercetare operaţională, par pentru a o descoperi este necesar — exceptînd sectoarele de transport şi telecomunicaţii — *a asculta conversaţiile de informare necontrolate, care au loc în relaxantele ore ce urmează conferinţelor. Sînt mai multe motive pentru această reticenţă, dar unul este dominant în rîndurile multor analişti de cercetare operaţională şi anume că profesiunea lor este fără îndoială de natură matematică, cu un foarte ridicat nivel de rigoare. Ei ştiu că în propriile lor aplicaţii cotidiene ale teoriei aşteptării asemenea rigoare nu este menţinută, pentru că de obicei nu este posibil a formula modele ale proceselor de aşteptare în termeni matematici foarte riguroşi şi a le rezolva. De aceea, aceşti analişti sînt refractari în a discuta experienţele lor pentru teama că ele vor fi expuse criticilor unor persoane competente. Dar această teamă nu este justificată. Mulţi dintre cei mai competenţi specialişti în teoria aşteptării sînt intens preocupaţi de aplicaţiile practice, chiar dnd aceste aplicaţii implică o mare ramificaţie şi diversificare a modelelor teoretice. Mai mult, această atitudine de reticenţă îi separă pe studenţii în cercetare operaţională de realităţile fenomenelor pe care le analizează şi duce la consolidarea ideii că modelele teoretice sînt altceva decît aproximări conceptuale ale realităţii.*

Lucrarea de faţă este o încercare de a abandona această reticenţă. Ea nu tratează despre teoria firelor de aşteptare, ci despre problemele aplicării rezultatelor ei în practică.

Sînt multe cărţi adecvate, şi chiar cîteva excelente, legate de această teorie şi nu am avut niciodată nici interesul, nici competenţa să le completez numărul. Altfel spus, scopul acestei cărţi este aplicarea teoriei aşteptării în găsirea de soluţii operaţionale problemelor de aşteptare din lumea reală. Deoarece este dificil de găsit cazuri concrete în reviste (fac excepţie unul sau două din articolele apărute mai recent cum ar fi „clasicul" „Traffic Delays and Toll- - booths" al lui Edie), am fost nevoit să utilizez materiale din surse familiare sau de la prieteni, dintre care unele nu au fost pînă acum prezentate publicului larg. Aceasta a însemnat să folosesc material obţinui din studii la care am fost eu însumi participant. Am urmat această cale cu regret. însă pot fi sigur de faptul că toate cazurile prezentate sînt reale, ca şi datele utilizate şi — cu anumite excepţii specificate în text — nefalsificate. Pericolele falsificărilor sînt limpezi.

Nu este o carte cuprinzătoare. Unele modele de aşteptare ce au fost foarte mult studiate nu sînt menţionate sau sînt prezentate doar în cîteva rînduri. Am punctat numai ceea ce cred necesar pentru atingerea scopului propus. Mai mult, nu există digresiuni legate de teoria probabilităţilor, statistica matematică sau de transformata Laplace. Se presupune că cititorul are anumite cunoştinţe despre aceste subiecte. Orice cititor care este familiarizat cu vreuna dintre cărţile teoretice mai bune, legate de aşteptare (cum ar fi cartea Elements of Queueing Theory *a lui Saaty) poate omite capitolele 2 — 5 ale prezentei cărţi. Aceste capitole au fost scrise pentru cei ce se iniţiază în acest domeniu sau pentru cei a căror memorie necesită o reîmprospătare printr-o recapitulare rapidă. Oricum, sper ca această carte luată global să fie interesantă şi utilă.*

Sînt profund îndatorat multora pentru ajutorul acordat. 0 recunoaştere în acest sens este făcută în cadrul textului şi notelor capitolelor. Trebuie oricum să-mi arăt recunoştinţa şi să aduc mulţumirile mele Companiei British European Airways, precum şi Companiei Air Canada pentru permisiunea de a utiliza extensiv materiale legate de studiile de cercetare operaţională la care am participat în perioada 1956 — 1964. Fără acest ajutor n-aş fi putut nici măcar să încep să scriu această carte.

Aş dori de asemenea să mulţumesc secretarei mele, d-nei Jeannine Lacelle pentru magistrala transpunere a indescifrabilelor mele notiţe; de asemenea soţiei mele, Barbara, pentru realizarea celor mai multe dintre grafice, a indexului şi a unei mari cantităţi de cafea.

ALEC M. LEE

Montreal
Place Vllle-Marie

INTRODUCERE

Pe măsură ce societăţile umane devin din ce în ce mai complexe, se pare că devine tot mai dificil pentru membrii lor de a evita participarea involuntară la procesele de aşteptare. Fiecare cititor al acestei cărţi trebuie să aibă o oarecare experienţă personală în acest domeniu. Pentru a cumpăra un timbru de la un oficiu poştal este necesar să stai la rînd pentru a fi servit. La aeroport, pentru a primi confirmarea unui zbor, de cele mai multe ori eşti nevoit să stai tot la rînd. Dimineaţa, înainte de a pleca de acasă, pentru a primi prin telefon date privind starea vremii, eşti obligat să formezi de mai multe ori numărul, pînă a obţine ceea ce doreşti. Toate acestea sînt procese de aşteptare.

Experienţa legată de aşteptare este foarte bogată. Dacă experienţa pasivă a unei activităţi pe parcursul unei perioade mai lungi ar duce la calificativul de expert (aşa cum mulţipracticieni insistă că este), atunci noi toţi am fi experţi în fenomene de aşteptare. De fapt, proporţia oamenilor ce pot fi găsiţi stînd la rînd la orice oficiu poştal şi care sînt experţi în materie de sisteme de aşteptare este redusă : şi s-ar putea admite, dar n-ar fi prea plăcut, că proporţia lor printre angajaţii oficiului poştal este încă şi mai mică. Nu poate fi presupusă prea multă familiaritate în legătură cu caracteristicile sistemelor de aşteptare. De aceea, ar fi nimerit a începe prin exemplificare, prin a stabili ceea ce înseamnă un sistem de aşteptare şi ce probleme se ridică cel mai semnificativ şi mai des în legătură cu asemenea sisteme. Deşi cele trei exemple ce urmează sînt descrise umoristic, ele sînt reprezentative pentru problemele şi procesele foarte reale. „Je me presse de rire

de tout, de peur d'etre obligi d'en pleurer". Ele prezintă întîmplări frecvente.

1.1. PR OBLEMA OŢEL ARIILOR

Corporaţia „The Allied Coke and Iron" este un vast concern ce acoperă diverse activităţi economice. Printre componentele sale sînt mai multe întreprinderi de colectare a fierului vechi, precum şi două oţelării. Cea mai veche oţelărie foloseşte procedeul Siemens de obţinere a oţelului, avînd o nevoie constantă de fier vechi de bună calitate. Fierul vechi se transportă în camioanele întreprinderilor de colectare ale companiei. Camioanele sosesc la oţelărie şi, înainte de a merge la furnale ca să-şi descarce încărcătura, trec peste un cîntar-basculă, pentru a o cîntări şi înregistra. Acesta este punctul critic.

La aproape orice oră, între 6 dimineaţa şi 10 seara, la cîntarul- basculă este un şir (rînd) format din camioane ce aşteaptă să fie cîntărite. Lungimea şirului variază; dar aproape fiecare camion pierde o parte apreciabilă a timpului aşteptînd. Unul dintre operatorii de la cîntarul-basculă are o idee : oare n-ar fi mai bine pentru companie să instaleze un al doilea cîntar-basculă şi astfel să reducă timpul de aşteptare al camioanelor? Oare costul instalării şi folosirii cintarului- basculă suplimentar nu va compensa posibilitatea de a spori utilizarea camioanelor?

Operatorul (pe nume Szymanowski) semnalează în scris sugestia sa şi o înaintează conducerii companiei. După cîteva luni sugestia sa ajunge să fie examinată de către Comitetul director. Inginerul-şef adjunct este însărcinat să facă o evaluare sumară. El replică imediat că : „este clar că prin dublarea capacităţii de cîntărire timpul mediu de aşteptare a fiecărui camion se va înjumătăţi. Aceasta ne va aduce un cîştig relativ mic. Eu cred că propunerea serviciului tehnic, de a ne vinde camioanele şi de a cumpăra unele mai mari, este mai valoroasă. Ea ne va costa doar 250 000 $. Ceilalţi membri ai Comitetului director (puţin obosiţi) sînt impresionaţi de acest raţionament critic. Domnului Szymanowski i se mulţumeşte pentru sugestia sa care, regretăm, este imposibil de materializat astăzi" ... şi i se acordă o primă de consolare de 20 $.

1.2.PROBLEMA CASEI DE BILETE

Acţiunea are loc într-o gară din micuţul oraş scoţian Paltries, într-o frumoasă dimineaţă de iulie. Tocmai s-a oprit ploaia. Murdo Macdonald intră să-şi cumpere un bilet pînă la Edinburgh, pentru trenul de la ora nouă. El găseşte deschis, ca de obicei, un singur ghişeu destinat vînzării biletelor de clasa întîi (pentru care nu este nici un amator) şi un altul pentru clasa a doua (unde se află cincisprezece persoane aliniate aşteptînd să le vină rîndul). Macdonald se aşază la coadă pentru clasa a doua. El este un om rezonabil şi, în ocaziile similare din trecut, a rezistat tentaţiei de a reclama nedreptăţile din organizarea căilor ferate. Chiar şi astăzi el nu sugerează ca ambele case de bilete — cea pentru clasa întîi şi cea pentru clasa a doua — să vîndă acelaşi gen de bilete şi ca pasagerii pentru clasa întîi să fie constrînşi astfel să stea la rînd cu ceilalţi. El îşi dă seama că un pasager ce va călători cu clasa întîi plăteşte mai mult şi este normal să i se ofere un serviciu superior calitativ, dar astăzi el este nespus de iritat de mişcarea înceată a funcţionarului de la ghişeu şi, aşa cum se în- tîmplă de cele mai multe ori, din iritarea sa îi vine o idee. De ce să nu se vîndă biletele pentru ambele clase la amîndouă case de bilete, dar astfel încît să i se îngăduie fiecărui pasager ce doreşte bilet pentru clasa întîi să intre în faţa rîndului, de îndată ce a sosit? în acest fel privilegiile nu vor fi diminuate, în timp ce capacitatea de vînzare a biletelor va fi practic dublată (pentru că de fapt nu există pasageri pentru clasa întîi la Paltries). „Adoptînd această procedură" scria mai tîrziu Macdonald către editorul revistei „Paltries gazette and Stock- breeder's Tribune", „timpul mediu pierdut la rînd va fi redus în ceea ce mă priveşte, ca şi în ceea ce priveşte şi pe ceilalţi pasageri de clasa a doua, şi aceasta fără o cheltuială suplimentară a societăţii de căi ferate şi fără vreun inconvenient pentru cei doritori de bilete de clasa întîi".

1.3. PROBLEMA SOŢIEI FURIOASE

William K. Overlander se găseşte în barul clubului de golf fellowridge, sorbind un Martini şi adresîndu-se unui coleg

de club. Sste indignat. El tocmai a emis o instrucţiune în cadrul companiei ale, al cărei efect va fi că în viitor nici unul dintre angajaţi (dar abso- ît *nici unul)* nu va mai utiliza serviciile Companiei aeriene Transce- ental Airlines pentru călătoriile oficiale de afaceri; aceasta din auză că în ziua anterioară soţia lui a avut o experienţă teribilă.

„După cum îţi spuneam", povesteşte el printre înghiţituri, „Marilyn a format de patru ori, în interval de 30 de minute, numărul de telefon al biroului lor de rezervări de bilete şi nu a reuşit să-l prindă. Apoi, în sfîrşit, a cincea oară a reuşit. Mi-a povestit că a sunat de trei ori şi apoi a răspuns o voce ce părea mai curînd o înregistrare pe bandă, care i-a spus că agenţii sînt foarte ocupaţi şi să aştepte puţin. Ei bine, a aşteptat circa jumătate de minut, timp în care nu s-a petrecut nimic, dar *absolut nimic,* cu excepţia intervenţiei vocii înregistrate ce a repetat mesajul anterior. Ca urmare, a închis".

„Ce a urmat ? " — îl întreabă prietenul său. „A încercat din nou ? ' ' „Nici vorbă", zise Overlander. „Aceasta nu a fost prima dată cînd se întâmplă aşa ceva la Transcedental. Nu, domnule, soţia mea a sunat la Compania aeriană Commonwealth şi Caribbean Airways şi ştii ce s-a întâmplat? A dat de ei de prima oară, fără nici un fel de aşteptare. Iată ceea ce se numeşte într-adevăr un bun serviciu. Băieţii de la Transcedental trebuie să capete noi ajutoare, după părerea mea. Probabil ei au numai o singură bandă înregistrată şi trei femei bătrîne la panoul de comandă."

Overlander, ale cărui sentimente le înţelegem şi le respectăm, ar fi surprins să afle că Transcedental are angajaţi exact acelaşi număr de agenţi pentru biroul de rezervări de bilete, ca şi Commonwealth şi Caribbean, pentru a servi (foarte convingător şi coincidenţial din punctul nostru de vedere) exact acelaşi număr de pasageri.

Nu este vorba despre un număr prea mic de funcţionari sau de un refuz de a investi bani; nu acestea sînt cauzele pentru care cei de la Transcedental sînt mai puţin prompţi în efectuarea serviciilor. Este vorba, după cum se va vedea, de ignoranţă.

1.4. NATURA SISTEMELOR DE AŞTEPTARE

Aceste trei povestioare moraliste sînt toate despre procese d« aşteptare şi ilustrează modul în care se pun problemele legate dt astfel de procese. în toate trei există *clienţi* care cer să fie *serviţi* Camioanele cu fier vechi trebuie să fie cîntărite; cetăţeanul Macdo nald vrea să i se vîndă un bilet de tren; stimabila cetăţeancă Over lander vrea să vorbească cu un agent al unei companii aviatice pentn a i se rezerva im bilet de avion.

Clienţii doresc să fie serviţi imediat, dar dorinţele lor nu sînt satisfăcute imediat, ei trebuind să aştepte la rînd. Momentele în care ei se aşază la rînd se numesc *momente de sosire.* Intervalul dintre momentul sosirii unui client şi momentul în care el este servit se numeşte *timp de aşteptare.* Clienţii sînt serviţi de către *staţii de servire,* numite uneori şi *canale* sau *ghişee.* Termenii : staţie de servire, canal sau ghişeu semnifică acelaşi lucru şi în această carte vor fi folosiţi alternativ. Cîntarul-basculă din primul exemplu este un *ghişeu*; funcţionarii de la ghişeu din al doilea exemplu reprezintă *staţii de servire;* fiecare telefon de la biroul pentru rezervări de bilete pentru avioane este un *canal.* Fiecare termen îşi are propria valoare ilustrativă.

Timpul scurs pentru satisfacerea serviciului cerut de client se numeşte *timp de servire.* Suma dintre timpul de aşteptare al clientului şi timpul de servire este îndeobşte cunoscută ca fiind *timpul total de aşteptare.* De cele mai multe ori este mai puţin important să ne gîn- dim la timpii totali de aşteptare, ci mai degrabă la timpii de aşteptare la rînd, dar apar frecvent şi excepţii.

Tipurile de întrebări ce se pun de obicei, în legătură cu sistemele de aşteptare, sînt următoarele :

a) Cîte staţii de servire trebuie instalate suplimentar, dacă numărul clienţilor şi timpul pentru servirea fiecărui client nu se schimbă, pentru *a reduce* procentul clienţilor care au de aşteptat mai mult de 2 min la mai puţin de 5 % ?

b) Ce efect are introducerea priorităţilor pentru anumite clase de clienţi asupra timpului de aşteptare?

c) Cit de mult trebuie mărit un fir de aşteptare pentru a reduce pierderea clienţilor la un procent mai mic decît 10 %?

d) Ce ar fi mai convenabil: să se instaleze o altă staţie de servire sau să se mărească camera de aşteptare ?

e) Dacă există două clase de clienţi, o anumită calitate a servirii clienţilor (măsurată prin timpul mediu de aşteptare) poate fi realizată mai ieftin prin înzestrarea fiecărei clase cu cîte un grup separat de servire sau prin introducerea unui singur grup care să servească ambele clase ?

Acestea sînt tipurile de probleme abordate şi tratate în cadrul acestei cărţi.

MODELE ALE SISTEMELOR DE AŞTEPTARE

2.1. GENERALITĂŢI

Nu există o ştiinţă a sistemelor de aşteptare. Există o teorie a aşteptării legată de studiul unor modele matematice riguroase, dar care dă impresia că se bazează pe un surprinzător de şubred postament de cunoştinţe empirice. Nu sînt multe rezultatele experimentale obţinute în legătură cu procesele de aşteptare. Aşa după cum se va vedea, acest fapt bizar — din punct de vedere ştiinţific — are influenţe negative privind aplicabilitatea şi utilitatea rezultatelor obţinute pe baza teoriei. Dar înainte de a studia acest aspect deosebit de important, precum şi consecinţele sale, va trebui să dăm un răspuns la două întrebări preliminare : ce este un model simbolic — sau matematic*’ şi care este scopul unui astfel de model? Pentru un model al sistemului de aşteptare din staţia de cale ferată Paltries putem considera următorii factori:

1. Particularităţile funcţionarului de serviciu (James Cameron este conştiincios, dar lent; Angus Sutherland este un tip iute, dar înclinat să dea bilete greşite sau să nu dea corect restul; Alan Robertson este rapid şi eficient; Jan Macrae nu este deloc practic).
2. Precizarea zilei din săptămînă (sînt mai mulţi pasageri de luni pînă vineri decît sîmbetele sau duminicile).

♦> **Churchinan, C. W., Akcoff ‘ R., Arnoff, L. *Introduction to Operations Research*- New York, Wiley, 1957.**

3. Starea vremii — dacă a fost foarte frig în timpul nopţii

sau nu (variaţia de temperatură de la Robbinston la Paltries este foarte mare şi dacă rouă a îngheţat pe linia ferată, trenul va întîrzia ; nu va mai exista graba în acest caz în procesul de aşteptare).
4. Prezenţa sau absenţa călătoarei Fiona McTaggart (dacă ea se va afla la coadă pentru un bilet, atunci operaţia va întîrzia îngrozitor de mult — pînă la disperare — pentru că : a) nu-şi găseşte niciodată portofelul pentru a-şi putea plăti biletul; b) parlamentează cu fiecare funcţionar de la ghişeu despre o reducere de preţ al biletului, care de fapt nu poate fi obţinută decît joia în iulie, după ora 17).
5. Natura călătoriei pasagerilor. (Majoritatea pasagerilor merg la Edinburgh în partea de sus şi la Robbiston în partea de jos, aceştia necreînd nici o problemă. Dar, întrucît nu există bilete tipărite pentru staţiile de după Berwick-on-Tweed, în cazul cînd un pasager doreşte totuşi un astfel de bilet, acesta trebuie scris de mînă pe un formular special, apoi înregistrat într-un registru negru. Aceasta, evident, necesită timp.)
6. Temperatura şi gradul de umiditate existent. (Timpul de servire a unui pasager creşte proporţional cu ambele elemente, exceptînd cazul în care funcţionarul de serviciu este Alan Robertson care s-a născut la Madras şi se simte în elementul său atunci cînd este cald.)

Pentru procesele de aşteptare în care sînt implicaţi clienţii-oameni şi oameni ce realizează serviciul cerut, oricine care a avut un contact cu astfel de probleme un timp suficient de lung poate alcătui o listă asemănătoare, cuprinzînd un şir de factori de acest gen.

Evident, nu toţi factorii au aceeaşi importanţă. Cititorul va intui că numărul 4 — McTaggart — este cu mult mai puţin important decît numerele 1, 2 şi 6. Dacă elementul esenţial al procesului îl constituie aglomeraţia din orele de vîrf, atunci factorul 3 va fi semnificativ doar dacă ora de vîrf este în primele ore ale dimineţii sau momentul de vîrf este iarna; în celelalte cazuri nu. Raţionînd în acest mod, cititorul poate scurta lista factorilor ce trebuie luaţi în considerare în orice moment al procesului.

Să ne oprim puţin asupra dezamăgirilor d-lui Karel Szymanowski. Factorii ce influenţează operaţia de cîntărire pot fi următorii: L° frecvenţa (intensitatea) sosirilor camioanelor; 2°particularităţile jperatorului de la cîntar; 3°

încărcarea medie a unui camion (camioa- îele excesiv încărcate se vor deplasa mai lent şi vor pierde astfel nai mult timp în deplasarea în rînd spre cîntar); 4° camioanelor de zece tone le este permis să se aşeze la rînd în faţa vagoanelor de cinci tone dacă şi numai dacă ele transportă deşeuri. Etc.

După cum se poate remarca, aceşti factori nu sînt aceiaşi cu cei pe care i-am găsit în ilustrarea anterioară, nici nu putem presupune că ei interacţionează în acelaşi mod. Totuşi unii sînt comuni pentru ambele cazuri. Selectînd, reducînd şi comparînd listele de factori care influenţează funcţionarea altor sisteme de aşteptare, putem identifica un număr mic de factori comuni şi de semnificaţie majoră în toate cazurile; este vorba de factori *primari.* Factorii care nu sînt comuni tuturor proceselor de aşteptare, apărînd doar în anumite procese de aşteptare sau chiar numai intr-unui, sînt factori *secundari.* Vor trebui luate în considerare şi legăturile şi interdependenţele dintre factori.

Se poate conchide că factorii primari sînt :

1° frecvenţa şi modul de sosire al clienţilor;

2° repartiţia timpilor de servire;

3° ordinea în care clienţii sînt serviţi;

4° numărul de staţii de servire;

5° repartiţia timpilor de aşteptare ale clienţilor.

în general sîntem interesaţi în a afla efectele modificărilor factorilor 1 — 4 asupra factorului 5. Repartiţia timpului de aşteptare este o *măsură a eficacităţii* sistemelor de aşteptare. (Vom vedea că mai există şi alte măsuri semnificative şi utile*). în plus, putem trage concluzia că legăturile semnificative dintre factori sînt:

1. Legătura dintre parametrii repartiţiei timpilor de servire şi frecvenţa medie de sosire a clienţilor.
2. Legătura dintre numărul de fire de aşteptare şi intensitatea medie de sosire.
3. Legătura dintre disciplina de aşteptare şi numărul de canale) în funcţiune.

Sîntem acum, într-o măsură mai mare sau mai mică, în situaţia de a începe formularea unui model general al sistemelor de aşteptare.

---

* **Pentru detalii se poate consulta : Morse, P. M., Kimball, G. *Methods of Operai ion. Research.* 1965.**

2.2. CARACTERISTICILE MODELELOR DE AŞTEPTARE

Modelul matematic constă în cîteva legături simbolice între factorii primari. Prin atribuirea unor forme particulare repartiţiiloi statistice asociate acestor factori primari şi prin atribuirea unor valori tuturor parametrilor incluşi în model, vom putea realiza previziuni. Putem spune, de exemplu, care va fi media timpilor de aşteptare a clienţilor în caz că ar fi zece staţii de servire şi care ar fi această medie în caz că ar fi 12, toate celelalte elemente rămînînd aceleaşi.

Obiectivul unui model matematic simbolic este de a realiza previziuni posibile despre comportarea sistemelor sub influenţa modificării condiţiilor sau, uneori, despre sisteme care deocamdată nu există. De aceea, teoria aşteptării este o teorie generală; este vorba nu de comportarea sistemelor de aşteptare propriu-zise, ci a unor modele simbolice abstracte ale acestora.† Este o idee importantă, ce trebuie reţinută.

Este uşor a cădea în greşeală crezînd că modelul ar fi însuşi sistemul. Dezvoltarea teoriei aşteptării, aşa cum este indicată de natura principalelor modele studiate, pare a fi puternic influenţată de două lucruri, anume de originea ei, origine ce se află în studiul aglomeraţiei sistemelor telefonice, şi de aceea ce este uşor şi posibil în analiza matematică‡. în cadrul acestui capitol vom observa că multe dintre presupunerile cel mai frecvent făcute, referitoare la studiile de aşteptare, sînt tocmai acelea care par realiste şi valide în realizarea şi studierea modelelor proceselor de aşteptare asociate sistemelor telefonice. Acestea însă nu pot fi aplicate în toate ocaziile; ele sînt neadecvate mai cu seamă atunci cînd clienţii şi staţiile de servire sînt oameni. Vom observa de asemenea că aceste presupuneri sînt chiar acelea care conduc la modele susceptibile de a le fi aplicată analiza matematică. (Matematicienii nu sînt mai dornici decît alţii să-şi dedice preocupările unor lucruri inabordabile.)

---

† **Tocher, K. D. *The Râie of Models in Operaţional Research J.* Roy. Statist. Soc., Pt. 2, 1961.**

‡ **Pentru un scurt istoric care indică geneza acestei situaţii, vezi : Saaty (a), cap. 1, secţiunea 1 — 6. Cititorul poate încerca de asemenea şi Sysky, R. *Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems.* Edinburgh, Oliver and Boyd, 1960. Vezi în special primul capitol.**

Vom analiza principalele caracteristici ale sistemelor de aşteptare şi în principal patru care sînt de cea mai mare utilitate în vederea unei clasificări. Acestea sînt: *fluxul de intrare, mecanismul de servire, disciplina de aşteptare* şi *numărul staţiilor de servire* (canalelor). Terminologia a fost creată de D. G. Kendall într-o carte celebră prezentată la Societatea Regală de Statistică din Londra, în 1951[§]. Această lucrare, poate mai mult decît altele, a avut ca urmare marele interes pentru teoria aşteptării, care a preocupat Anglia după anul 1950. Kendall şi-a extins nomenclatorul intr-un sistem de clasificare care este astăzi universal.

Clasificarea lui Kendall este de forma : *A/B/s,* unde *A* specifică modul de intrare, *B* este repartiţia timpilor de servire, iar s este numărul de staţii de servire. In general se presupune că clienţii sînt serviţi în ordinea sosirii, deoarece codul clasificării nu permite definirea disciplinei de aşteptare. Această schemă este însă prea vagă faţă de obiectivele acestei cărţi. De aceea vom folosi o formă extinsă a notaţiei lui Kendall, anume *A/B/s* : (d/e), unde *A, B, s* au aceeaşi semnificaţie pe care le-a dat-o Kendall, *d* este numărul maxim de clienţi ce pot fi cuprinşi în sistem în orice moment (incluzînd pe cei ce sînt serviţi), iar *e* identifică disciplina de aşteptare.

Cîteva exemple vor lămuri aceste probleme.

1. *M/M/1* : (20/FIFO) reprezintă un model de aşteptare cu intrare aleatoare, timpi de servire aleatori, o staţie de servire; capacitatea maximă a sistemului este de 20 (adică în timp ce 19 persoane aşteaptă şi una este servită, toţi noii veniţi sînt refuzaţi şi pleacă), iar disciplina de aşteptare este primul venit, primul servit.

2. *$M/E_k/5$-.* (oo/SIRO) înseamnă intrare aleatoare, timp de servire erlangian, cinci staţii de servire, capacitate a firului de aşteptare infinită (adică nici o intrare nu este refuzată), iar disciplina de aşteptare aleatoare. Chiar şi această notaţie nu reuşeşte să clasifice complet modelele de aşteptare, dar este ceva mai utilă pentru scopul nostru, decît cea folosită de către Kendall.

---

§ **Kendall, D. G. *Some Problems in the Theory of Queues.* J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 13, No. 2, 1951. Este o remarcabilă lucrare, în care pentru prima oară Kendall sugerează utilizarea conceptului de lanţuri Markov.**

2.8.1. FLUXUL DE INTRARE

Apelul telefonic este un fenomen care nu rezultă din acţiunea comună a mai multor persoane, ci apare sub o formă individuală. De aceea nu este surprinzător faptul că în majoritatea lucrărilor despre sistemele de aşteptare s-a presupus că sosirile sînt individuale. Aceasta şi pentru a.înlesni calculele matematice; ar fi însă greşit — orice motiv am avea s-o facem să considerăm sosirile ca fiind individuale, în unele cazuri în care este destul de clar că nu este deloc aşa. în anumite sisteme de aşteptare, clienţii nu sosesc singuri, ci în grupuri. De exemplu, pasagerii pentru cursele aeriene sosesc la aeroport în grupuri familiale, delegaţii de afaceri etc. Primul pas ce trebuie făcut întotdeauna în examinarea unui sistem de aşteptare este de a stabili dacă sosirile sînt individuale sau în grup *(agregate).* Momentele de timp în care clienţii individuali sau grupurile intră în sistemul de aşteptare se numesc *momente de sosire,* iar intervalele de timp dintre două momente de sosire consecutive se numesc *timpii dintre sosiri.*

în studiile privind procesele de aşteptare este necesar a culege, datele privitoare la timpii dintre sosiri într-o formă convenabilă pentru a putea da răspuns la două întrebări:

1. Timpii dintre sosiri sînt oare dependenţi, există oare între ei anumite corelaţii?
2. Timpii dintre sosiri sînt oare corelaţi cu alte elemente ale sistemului de aşteptare?

De cele mai multe ori se presupune că răspunsul la ambele întrebări este negativ. Cititorul circumspect va crede în mod consecvent că răspunsurile pot fi presupuse negative atunci cînd procesele de aşteptare se referă la apelurile telefonice[**] şi că răspunsurile negative conduc la o tratare matematică mai simplă. Cu siguranţă că va avea dreptate.

Vom da un exemplu de timpi dintre sosiri care nu sînt independenţi[††]. Zborurile necesitate de schimburile

---

** **Fry, T. C.** ***Probability and its Engineering Uses.*** **Second Edition, New York, D. Van Nostrand Co. Inc.. 1965.**

†† **Există mai multe iccrări ce tratează problemele de acest tip. Vom da patru exemple: Bowen.E. G., Pearcey, T.** ***Delays in theFlow of A ir Traffic.*** **J. Roy. Aero. Soc., 52 (1948), p. 447 ; Pearcey, T.** ***Delays in the Landing of A ir Traffic. J.*** **Roy, Aero. Soc., 52 (1948), p. 450 ; Beli, E. G.** ***Operatorional Research into Air Traffic. J.*** **Roy. Aero. Soc., 53 (1949), p. 331 ; Galliher, H. P., Wheeler, R. C.** ***Xon-stationary Queueing***

comerciale sînt planificate de conducerea aeroportului. Timpii de sosire sînt planificaţi cu mult timp înainte. în perioadele de vîrf ale zilei (la marile aeroporturi) sosirile sînt planificate la intervale egale. Dar avioanele sosesc mai devreme sau mai tîrziu. Momentul real al sosirii oricărui avion se găseşte în apropierea momentului planificat. Dacă întinderea acestei repartiţii a sosirilor este redusă în comparaţie cu intervalele de timp planificate între sosiri, nepunctualitatea poate fi neglijată în cele mai multe dintre cazuri. Dacă însă este mai mare, sosirile pot fi considerate — din nou din raţiuni practice — aleatoare [##]. însă în cazul intermediar, cînd timpii planificaţi dintre sosiri sînt de ordinul primelor două dispersii ale abaterilor momentelor sosirilor reale de la momentele planificate, sosirile nu pot fi tratate ca regulate sau ca aleatoare. Timpii consecutivi dintre sosiri sînt corelaţi între ei, corelaţie ce nu poate fi ignorată fără riscul unei erori.

Următorul pas ce trebuie făcut constă în stabilirea repartiţiei statistice a timpilor dintre sosiri şi pentru aceasta trebuie mai întîi să ne întrebăm : poate fi considerată oare această repartiţie ca fiind staţionară în timp ? Altfel spus, putem presupune oare că repartiţia timpilor dintre sosiri nu-şi modifică în timp proprietăţile statistice ? Oare probabilitatea unui interval cu durata de *x* minute, ales în mod aleator, este independentă de momentul zilei în care acest interval a fost măsurat? în studiile teoretice făcute se presupune de obicei că repartiţiile timpilor dintre sosiri *sînt* staţionare. în realitate asemenea cazuri sînt rare. Figura 2.1 reprezintă un model zilnic al convorbirilor telefonice dintr-un birou pentru rezervări de bilete de avioane. Este limpede pe acest exemplu că media timpilor dintre sosiri este variabilă în timp (modul de variaţie este aproape sistematic cinci zile pe săp- tămînă).

Pro- babilities for Landing Congestion of Aircraft. **în : Operat. Res. 6 (1958), No. 2.**

Cox şi Smith, p. 14.

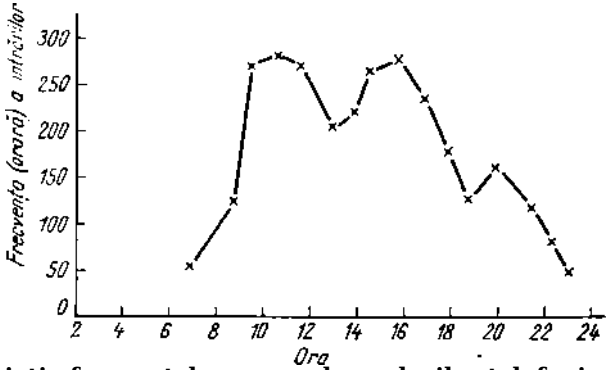


Fig. 2.1. Variaţia frecvenţelor orare ale apelurilor telefonice intr-o zi tipică (luna mai 1959).

Această discrepanţă dintre teorie şi realitate nu este în fapt foarte mare. Majoritatea problemelor practice legate de procesele de aşteptare sînt problemele *orelor de aglomeraţie.* Cu alte cuvinte, acestea devin foarte serioase cînd frecvenţa sosirilor este maximă. După cum vom vedea, pe parcursul unor asemenea perioade, dacă acestea nu sînt excesiv de lungi, repartiţiile statistice ale timpilor dintre sosiri nu sînt de cele mai multe ori suficient de staţionare pentru a ne putea permite să le considerăm astfel.

Forma repartiţiei timpilor dintre sosiri, care a fost cel mai mult studiată, este cea corespunzătoare aşa-numitei repartiţii a sosirilor *aleatoare,* adică funcţiei exponenţiale negative. Densitatea de probabilitate a unui timp dintre sosiri de mărime *t* este în acest caz

$$a(t) = X\, e^{-Z(},$$

unde X este media sosirilor în unitatea de timp (unitate considerată în această carte a fi minutul, pentru cazul în care nu se specifică altceva). Aceasta este echivalent cu a spune că probabilitatea a *n* sosiri în unitatea de timp este dată de

$$e^{\check{A}} \frac{X^n}{n!} \text{ (repartiţia Poisson).}$$

Semnificaţia acestei repartiţii este că probabilitatea XdZ a unei sosiri într-un interval mic de timp dt este constantă. Ea nu este afectată de momentul în care a avut loc ultima sosire, nici de numărul sosirilor care au avut deja loc. într-o exprimare mai tehnică, intervalele dintre sosirile consecutive sînt variabile aleatoare independente între ele, toate avînd aceeaşi funcţie de repartiţie.

Cititorul îşi va reaminti că transformata Laplace a unei funcţii exponenţiale negative este

$$(1 - 2/X)"^{1}.$$

Funcţia generatoare corespunzătoare repartiţiei Poisson este

Un alt tip de proces de intrare, care are o oarecare importanţă practică, este cel numit de către Cox şi Smith[§§] *tipul cu intrare reînnoită.* Acesta poate avea loc atunci cînd intrările intr-un sistem de aşteptare sînt generate de ieşirile unui sistem anterior de aşteptare, sau de emisii de la un număr finit de surse, ce emit fiecare cîte un client la intervale ce urmează o anumită repartiţie. De exemplu, să considerăm *k* asemenea surse. A i-a sursă generează clienţi la anumite momente, astfel incit intervalul dintre două generări succesive este repartizat cu o densitate de probabilitate $a_t\{t)$. în acest caz fluxul combinat de sosiri format de ieşirile celor *k* surse are o repartiţie specială a timpilor dintre sosiri. Este cunoscut faptul că în asemenea cazuri, forma statistică a sosirilor cumulate este aproximativ aleatoare pentru perioade mai scurte decît media intervalelor dintre sosirile de la toate sursele. în practică, intrările în sistemele de aşteptare pot fi considerate ca fiind aleatoare.

2.2.2.MECANISMUL DE SERVIRE

Intervalul dintre momentul în care clientul începe să fie

§§ **Vezi comentariile făcute in Cox şi Smith, pp. 106 —107 şi 141, ultimul paragraf.**

servit şi momentul în care servirea este terminată este cunoscut sub denumirea de *timp de servire.* Este important să facem distincţie între această mărime şi *timpul de blocare* al staţiei de servire. Vom numi *timp de blocare* intervalul de timp dintre momentul în care începe timpul de servire al unui client şi momentul în care începe timpul de servire pentru următorul client, în cazul că acest al doilea client a stat la coadă pentru a fi servit. Timpul de blocare poate fi conceput ca fiind timpul total în care un client împiedică servirea următorului, prin blocarea staţiei de servire.

Nu este necesar ca timpul de servire al unui client să coincidă cu timpul său de blocare. De exemplu, să considerăm un cititor care împrumută o carte de la bibliotecă. El soseşte la ghişeu, cere cartea dorită, prezintă legitimaţia, bibliotecarul îi caută cartea, o înregistrează şi i-o dă împreună cu legitimaţia. Din punctul de vedere al cititorului, *timpul* său de *servire* este încheiat şi, ca atare, pleacă. Dar bibliotecarul nu serveşte imediat cititorul următor. El va pune înapoi fişa cărţii şi — dacă este cazul — o va înregsitra într-un dosar special (căci bibliotecarul Alderman Jones vrea să ştie proporţia cărţilor împrumutate din sectorul lucrărilor social-politice). Abia în acest moment el este gata pentru a servi următorul cititor : *timpul de blocare* s-a încheiat.

Diferenţa dintre timpul de servire şi timpul deblocare poate apărea, în acest caz, banală. S-ar putea defini timpul de servire ca fiind chiar timpul de blocare, şi astfel s-ar putea utiliza formulele standard. Este, fără îndoială, o consideraţie practică: munca realizată pe „timpul de servire" a clientului este, în general vorbind, obligatorie pentru ca clientul să elibereze staţia. Cititorul nu va pleca fără cartea dorită. Restul servirii, efectuat în timpul de blocare, nu este neapărat necesar să fie realizat în acest timp, în scopul de a satisface clientul. Poate fi efectuat într-un alt moment al zilei. în acest fel, numărul celor ce vor sta la rînd va scădea simţitor. Metoda ar fi foarte eficientă dacă s-ar putea aplica tuturor sistemelor de servire, astfel încît, practic, timpii de servire să se confunde cu timpii de blocare. Următorul exemplu va reliefa semnificaţia distincţiei ce o facem între aceşti timpi.



Fig. 2.2. Sistemul de aşteptare al controlului paşapoartelor.

Procesul de aşteptare ilustrat în fig. 2.2 nu este ieşit din comun; el poate fi remarcat în operaţiile privind controlul paşapoartelor, la multe aeroporturi internaţionale.

Fie *c* ghişee de control al paşapoartelor, toate realizînd acelaşi tip de servire. Cînd un turist ajunge la unul dintre aceste ghişee, ofiţerul de serviciu va începe executarea formalităţilor sau — dacă preferaţi — va începe ,,să-l servească". Timpii de servire pentru fiecare turist şi pentru fiecare ghişeu în parte sînt independenţi, identic repartizaţi. Toţi turiştii sosiţi se aşază la coadă în ordinea strictă a sosirii, pe un singur şir. Nimănui nu i se permite să înainteze spre ghişeu, pînă cînd turistul anterior nu a fost servit. In sfera controlului paşapoartelor această regulă este de obicei controlată de un funcţionar plasat în faţa ghişeelor.

Dacă clientul ce urmează ar putea să se deplaseze cu viteza luminii la primul ghişeu liber, de îndată ce clientul anterior servit şi-a încheiat timpul său de servire, atunci timpul de servire şi timpul de blocare pentru acest client ar fi acelaşi. Aceasta este situaţia în sistemele telefonice, unde „clienţii" sînt *convorbirile* care, evident, se pot deplasa cu viteză mare la o linie liberă. Dar pasagerii ce trec pe la ghişeele de control al paşapoartelor nu pot să se deplaseze cu viteza luminii. Ei merg cit mai calm şi mai degajat; graba poate produce suspiciuni ofiţerului de serviciu. Mai mult, distanţele din capul şirului pînă la ghişee nu sînt identice. Durează, în medie, mai mult a merge la ghişeele laterale decît la cel din centru. Putem presupune că există *c* variabile

x_i (i = 1,2, ..., c), reprezentînd timpii de deplasare pînă la fiecare din cele *c* ghişee. Timpul de blocare la ghişeul *i* este de aceea variabila v_i, unde $v_f = v + x_i$, *v* fiind timpul de servire al clientului.

în majoritatea analizelor proceselor de aşteptare timpii de blocare sînt mai importanţi decît timpii de servire şi trebuie utilizaţi *în locul* timpilor de servire, orice formulă de aşteptare ar fi fost folosită. Aşa stînd lucrurile, procesul de aşteptare de la controlul paşapoartelor nu este unul din cele mai simple; există mai multe staţii de servire şi fiecare are o altă repartiţie a timpului de servire[***]. Sperăm că cititorul este convins de semnificaţia deosebirii dintre timpul de servire şi timpul de blocare şi va considera că ei sînt trataţi, în majoritatea modelelor teoretice de aşteptare, ca identici.

Să mergem mai departe, atribuind deocamdată clienţilor calităţile obişnuite; vom presupune că timpul de servire şi timpul de blocare sînt identici. Odată eliminată această dificultate, trecînd la examinarea proceselor de aşteptare, trebuie să ne punem patru întrebări, legate de timpii de servire :

1. Oare toţi clienţii sînt de acelaşi tip, adică timpii lor de servire au aceeaşi funcţie de repartiţie?
2. Oare toate staţiile de servire sînt identice, adică timpii de servire legaţi de staţiile de servire au aceeaşi funcţie de repartiţie?
3. Timpii de servire sînt oare corelaţi cu alte aspecte ale sistemului?
4. Eeparţiţia timpului de servire este oare staţionară?

La începerea cercetării se speră întotdeauna că răspunsurile la aceste întrebări vor fi afirmative. în lucrările teoretice, de cele mai multe ori aşa se şi presupune ; din păcate, însă, în practică aceste cazuri nu sînt prea întîlnite. Cîteva exemplificări o vor dovedi.

Cargouri ce transportă minereuri intră într-un port

*** **Astfel de procese au fost studiate şi modelate, dar nu slnt discutate in amănunt In această lucrare. Pentru unele detalii recomandăm lucrarea :**
Gumbel, H. *Waiting Lines ivith Heterogeneous Servers.* în : Operat. Res., No. 4, 1960. Modelul lui Gumbel este aplicabil cu o disciplină de aşteptare FIFO, preferabil in forma controlului total al intrărilor. în multe situaţii reale, in care există staţii de servire eterogene (de exemplu ghişeele de la gări), nu există un singur şir controlabil, ci mai multe, intre care clienţii pot să se deplaseze.

pentru a-şi descărca încărcătura de minereu de fier. Ele au înzestrări şi capacităţi diferite. De aceea, timpii necesari pentru a le descărca — timpii de servire — nu sînt omogeni din punct de vedere statistic. Ei au deci repartiţii diferite.

În cadrul procesului de control al paşapoartelor timpul de blocare, care, în orice analiză a procesului, trebuie să înlocuiască timpul de servire, depinde de repartiţii diferite ce corespund diferitelor ghişee.

Lingourile de oţel sosesc la laminoare de la cuptoare deschise. Ele sînt încă incandescente, dar prezintă variaţii de temperatură. Ele trebuie plasate în cuptoare de reîncălzire (puţ infiltrat în pămînt) înainte de a fi laminate, operaţia de laminare necesitînd o temperatură înaltă a lingourilor. Dacă cuptoarele de reîncălzire sînt pline în momentul în care soseşte un lingou, acesta trebuie să aştepte. în timpul acestei aşteptări, el se răceşte. Cu cît aşteaptă mai mult, cu atît va trebui menţinut mai mult în cuptorul de reîncălzire. Timpul de servire al acestei operaţii este timpul în care lingoul ocupă cuptorul de reîncălzire. De aceea, în acest caz, timpul de servire este direct proporţional cu timpul de aşteptare, iar procesul este autoagravant.

Agenţii liniilor aeriene civile lucrează opt ore pe schimb, la un aeroport, verificînd pasagerii pentru diferitele zboruri. Anumite studii legate de operaţiile de verificare, făcute atît în Anglia cît şi în
S.U.A., au arătat că ele obosesc agenţii şi că timpii deservire sînt mai lungi şi mai variabili spre sfîrşitul schimbului.

Apare astfel evident că răspunsurile afirmative de la primele pentru întrebări nu pot fi întîlnite întotdeauna în lumea reală. Deoarece teoria, în general, presupune contrariul, ne vom ocupa în continuare de anumite procese de aşteptare pentru a reliefa cît de eronat poate fi un raţionament care presupune afirmativ răspunsurile de mai sus şi foloseşte modele teoretice gata făcute, acolo unde este clar că nu sînt adecvate. Desigur, cititorul va începe să creadă că, neputînd fi folosite în acest fel, multe modele de aşteptare clasice familiare nu pot fi folosite la nimic altceva, decît în practica telecomunicaţiilor. Deci întrebarea „Cît de temeinice sînt aceste modele?” nu este deloc de ignorat.

Acum, cînd unele aspecte au fost clarificate, vom trece sumar în revistă tipurile de repartiţie a timpului de servire care sînt cel mai des utilizate şi care au fost cel mai mult

studiate. Vom începe cu repartiţia exponenţială negativă.

Repartiţia exponenţială negativă a mai fost considerată atunci cînd **s-a** vorbit despre intrările în sistemul de aşteptare. în acest caz, densitatea de repartiţie a timpului de servire *de durată t* este dată de r elaţia

6(f) = ue-^,

unde *g.* este numărul mediu de clienţi serviţi în unitatea de timp sau, altfel spus, *b = 1/p* este timpul mediu de servire a unui client.

Din punct de vedere matematic, aceasta este cea mai convenabilă formă a repartiţiei timpului de servire. Explicaţia este că timpul rămas pînă la efectuarea deplină a unui serviciu este independent de timpul pentru care serviciul a fost în progres. Aceasta înseamnă, de exemplu, că dacă un client găseşte doar o persoană înaintea sa şi această persoană este în curs de servire, atunci timpul de aşteptare este repartizat exact ca şi timpul de servire. Acest lucru simplifică foarte mult analiza.

Repartiţia exponenţială negativă a timpului de servire nu este prea comună, dar nu sînt rare cazurile în care repartiţiile timpilor de servire observaţi nu diferă prea mult de repartiţia exponenţială negativă. Cînd apare o deviaţie observabilă, este adesea posibil să o aproximăm cu repartiţia Pearson de tipul III. Există suficiente motive matematice pentru alegerea unei repartiţii de acest gen. De fapt, în general, este posibil a aproxima astfel de date cu *repartiţia logaritmică normală* (vezi, de exemplu, cap. 15). Dar repartiţia loga- ritmică normală nu este tot atît de convenabil de manevrat, nici nu admite o interpretare mai convenabilă decît repartiţia Pearson de tipul III.

Repartiţia Pearson de tipul III, care este utilizată în modelele proceselor de aşteptare, are densitatea de repartiţie

$$\frac{1}{\Gamma(k)} (\mu k)^k \, e^{-\mu k t} t^{k-1}.$$

Atunci cînd *k* este un întreg, formula poate fi exprimată, în forma sa *erlangiană* (numită astfel după danezul Karl Erlang, cel care a utilizat această formă în studiile firelor de

aşteptare):

$$\frac{(\hat{})^{fc}}{(fc-1)'}$$

în această formă, repartiţia este deci aceea a unei sume de *k* variabile independente, identic repartizate exponenţial cu media l/(fifc). Aceasta este cea mai utilă legătură între repartiţia Erlang şi cea exponenţială. Repartiţia poate fi privită ca o modificare a repartiţiei X^2 cu media 1/ji şi cu *2k* grade de libertate.

Cititorul va remarca existenţa a doi parametri în formula repartiţiei, ţi şi *k* ; astfel, ambii pot fi estimaţi utilizînd un set de observaţii. Repartiţia este foarte asimetrică pentru valori mici ale lui *k* ; pentru *k* = 1 este tocmai repartiţia exponenţială negativă. Pe măsură ce *k* creşte, dispersia începe să descrească, pînă cînd, pentru un *k* suficient de mare repartiţia devine aproape constantă.

Media repartiţiei este 1/ji, iar coeficientul de variaţie este *l/]/k.* Transformata Laplace a repartiţiei este

[1 +

Al treilea tip important de repartiţie a timpului de servire este *repartiţia constantă.* Aceasta însă nu necesită nici o prezentare.

2.2.3. DISCIPLINA DE AŞTEPTARE

în teoria aşteptării se presupune ca ipoteză majoră asupra disciplinei de aşteptare faptul că clienţii sînt serviţi în ordinea sosirii. Această regulă este numită FIFO†††, ceea

---

††† **Regula FIFO se referă la „primul venit, primul servit", aceasta fiind o formă mai exactă de descriere decit „primul sosit, primul plecat".**

într-un proces cu mai multe staţii, primul client din staţie nu o părăseşte neapărat mai devreme decit alt client, care a intrat intr-o staţie diferită, la alt moment. în continuare, regulile disciplinei de aşteptare, cum ar fi FIFO sau SIRO, se referă la modul in care clienţii sint selectaţi in fir pentru a fi serviţi, neavind nici o legătură cu ordinea in care ei părăsesc sistemul. în cazul sistemelor de aşteptare cu un singur fir, evident că nu există nici o diferenţă atita timp cit regulile priorităţilor relative nu sint operaţionale.

ce înseamnă *„primul venit* este *primul servit"*. Disciplina de aşteptare este elementul esenţial de corectitudine din punctul de vedere al clienţilor, fiecare fiind preocupat de propriul său timp de aşteptare. Ea nu este neapărat esenţială din punctul de vedere al staţiei de servire şi poate fi chiar nesemnificativă în situaţiile în care clienţii sînt indiferenţi faţă de timpul cît aşteaptă.

Merită să examinăm implicaţiile regulii FIFO. în acest scop să considerăm sistemul de aşteptare de la controlul paşapoartelor care a fost descris în secţiunea precedentă. Regula FIFO poate fi realizată doar într-un sistem de aşteptare cu mai multe staţii de servire, cînd :

1. Clienţii sînt îndreptaţi, în ordinea sosirii lor, spre un singur şir de aşteptare şi rugaţi să se deplaseze mai departe spre capul şirului.

2. Un client poate părăsi şirul numai în clipa cînd a ajuns în faţă şi i-a fost permis printr-un semnal să facă aceasta.

Ne permitem să comentăm aplicabilitatea acestei proceduri. Mai întîi, aşa după cum remarcam şi în capitolul precedent, regula FIFO poate fi foarte bine aplicată la sistemele telefonice, acolo unde clienţii — în acest caz, convorbirile — sînt obligaţi, datorită circuitelor, „să înainteze pe o singură linie".

Regula poate fi utilizată, de asemenea, în condiţiile clienţilor- oameni, prin adoptarea unei simple ordonări, întîlnită de obicei în magazinele alimentare nord-americane. Fiecare client, la sosire, primeşte un tichet numerotat. Atunci cînd un client a fost servit, vînzătorul va striga numărul următor. Persoana care are tichetul cu numărul menţionat va înainta pentru a fi servită şi va înmîna tichetul vînzătorului,

Regulile FIFO privind disciplina de aşteptare sînt de fapt foarte larg răspîndite. Ele tind să apară ori de cîte ori:

1. Clienţii sînt oameni sau fenomene abstracte asociate oamenilor — cum sînt convorbirile telefonice — care sînt foarte afectaţi de durata de aşteptare sau de tratamentul diferenţiat.

2. Există restricţii de natură fizică (circuitele telefonice, numărul tichetelor) sau psihică (morală) (de exemplu atitudinea pasagerilor într-o staţie de autobuz din Londra) care obligă să se înainteze în mod ordonat.

Ar fi însă greşit să considerăm că regulile FIFO ar fi

universale, chiar atunci cînd clienţii sînt oameni. De exemplu, să considerăm oamenii care aşteaptă autobuzul într-o staţie din Roma. Regula de aici ar putea fi comparată cu o altă regulă care a fost studiată destul de amănunţit: servirea în ordine aleatoare, cu alte cuvinte, regula SIRO. Regula SIRO a disciplinei de aşteptare poate fi întîlnită în multe situaţii ca, de exemplu, în telefonie, în operaţiile manuale efectuate la un tablou de comutaţie, la vînzarea răcoritoarelor la bufetul unui teatru, în pauzele piesei; la rezervarea de cuşete pentru pasageri. (Nu este o glumă referitoare la căile ferate; de fapt, sînt foarte frecvente cazurile în care companiile feroviare nu pot comunica cu pasagerii înregistraţi pentru rezervări, sunîndu-i la numărul de telefon pe care aceştia l-au lăsat, şi vor continua căutările pînă cînd, printr-o şansă, vor găsi pe cineva care mai doreşte o cuşetă.)

Există anumite situaţii speciale, aşa după cum vom vedea, în care regula LIFO (ultimul venit, primul servit) a disciplinei cozii ar fi foarte potrivită. De exemplu, în cazul lingourilor de oţel ce aşteaptă să intre la reîncălzire, regula LIFO a disciplinei de aşteptare ar putea fi cea mai eficientă. Prin utilizarea ei, căldura ar putea fi conservată, s-ar scurta timpul de servire şi în cele din urmă s-ar reduce şi timpul de aşteptare. Se pare că aşa este, ţinînd seama de legea lui Ştefan a răcirii.

Alte tipuri de disciplină a aşteptării sînt asociate unor reguli de prioritate, atunci cînd există mai multe tipuri de clienţi. Să presupunem că clienţii fac parte din *k* clase şi fiecare clasă prezintă o anumită prioritate. Clienţii din clasa a i-a sosesc urmînd o repartiţie dată de funcţia $A_i(t)$ şi sînt serviţi, repartiţia timpului de servire fiind dată de funcţia $B_i(t)$. Clienţii componenţi ai unei aceleiaşi clase sînt serviţi după regula FIFO, dar clienţii cu prioritate *i* sînt serviţi înaintea celor cu prioritatea i+1. Există două feluri de priorităţi. Dacă este în curs de servire un client cu prioritatea *i* +1, acesta va putea fi înlocuit şi reîntors în şirul de aşteptare în momentul cînd un client cu prioritate mai mare intră în sistem. Aceasta se numeşte *prioritate absolută.* Dacă totuşi clientului în curs de servire i se poate termina serviciul, regula de prioritate urmînd să fie operativă după aceasta, avem de-a face cu un serviciu cu *prioritate relativă.* în cadrul unui model, vom nota serviciul cu priorităţi

absolute cu codul PSPO (ordinea de servire a priorităţilor absolute), iar priorităţile relative NPPS (ordinea de servire a priorităţilor relativă). Este destul de dificil să tratezi aceste priorităţi din punct de vedere matematic, exceptînd cazurile modelelor simple, şi pînă în prezent nu li s-a acordat prea multă atenţie. Acest aspect al priorităţilor ridică probleme interesante legate de cost, care nu a fost incorporat în modelele de aşteptare aşa cum ar fi trebuit. De exemplu, costurile pot fi introduse pentru a compara pierderile cauzate la neacordarea unei priorităţi mai mici clientului aflat în serviciu, cu pierderile totale sau parţiale rezultînd din eventuala lui eliminare.

în concluzie, se pot observa o mulţime de discipline de aşteptare ce operează în multe sisteme reale de aşteptare, dar este dificil a le formula matematic. De exemplu, există fenomenul deplasării[###]; deplasări individuale ale clienţilor de la un şir la altul, în scopul găsirii unui avantaj personal (aceasta în cazul cînd există un şir pentru fiecare din staţiile de servire, toate staţiile fiind identice). Pînă nu de mult, nimeni nu a dat prea multă atenţie acestui fenomen, fie şi de o manieră empirică.

Există, aşadar, multe tipuri de discipline de aşteptare, şi pentru că regulile care guvernează ordinea servirii sînt printre aspectele foarte uşor controlabile şi coordonabile ale proceselor de aşteptare, ele prezintă un mare interes pentru cercetătorul operaţional.

2.2.4. NUMĂRUL STAŢIILOR DE SERVIRE

Cînd într-un sistem de aşteptare sînt mai multe staţii disponibile pentru a realiza servirea, elementul esenţial devine organizarea acesteia. Există două tipuri principale de organizare a servirii: *în paralel* şi *în serie.* Prin staţii de servire în paralel vom înţelege un număr de staţii avînd facilităţi de servire identice, astfel incit un client să poată fi servit la fel de bine la oricare dintre ele. Cînd un client poate selecta sau poate fi îndrumat la oricare dintre staţii, vom spune că staţiile sînt *complet abordabile.* Există, după cum

l-'enomen cunoscut sub denumirea de „jockeying”. (iV.T.)

vom vedea, posibilitatea ca să fie mai multe staţii în funcţiune, dar care nu sînt complet abordabile, adică ele sînt complet abordabile doar de către anumiţi clienţi, dar nu şi de către ceilalţi. Cînd are loc acest lucru, vom vorbi despre *abordarea restrictivă.*

Staţiile de servire în serie se întîlnesc de obicei atunci cind sistemul de servire este defalcat în mai multe elemente. Atunci, pentru a realiza servirea, se formează o serie de şiruri de aşteptare, fiecare staţie fiind destinată unui element al servirii. Clientul trece pe rînd pe la toate staţiile, începînd cu prima. El va avea de aşteptat pentru a fi servit la toate fazele procesului.

Timpii de aşteptare ai clientului şi timpii totali de aşteptare sînt puternic afectaţi de forma organizării şi este important de a decide corect modul optim de alocare a capacităţii de servire. în general, în această carte, ne vom ocupa foarte sumar de sistemele de aşteptare cu staţii de servire în serie. Aceasta nu pentru că problema ar fi lipsită de importanţă, ci datorită dificultăţii de a găsi cazuri potrivite pentru a le discuta.

MODELE CU O SINGURĂ STAŢIE DE SERVIRE

3.1. GENERALITĂŢI

Se obişnuieşte să se înceapă expunerile în teoria aşteptării cu o prezentare a diferitelor modele cu o singură staţie de servire şi în particular să se prezinte în detaliu aparatul matematic al celui mai cunoscut şi mai utilizat dintre ele, adică al modelului Jf/Jf/1: **(oo/FIFO).** Este limpede că motivele pentru aceasta sînt în primul rînd de natură pedagogică. însemnătatea practică a modelelor cu o staţie de servire, de orice gen ar fi, este relativ neînsemnată. Atunci cînd se descoperă unele neajunsuri în funcţionarea unui sistem cu o staţie de servire, de obicei se încearcă să se evalueze posibilităţile transformării lui într-un sistem cu două staţii de servire. Meritele pedagogice ale modelelor cu o staţie de servire nu trebuie însă ignorate. Cu toată aplicabilitatea lor practică directă limitată, vom păstra tradiţia şi vom începe analiza cu ele.

înainte de a trece la discutarea diferitelor modele cu o staţie de servire, trebuie să menţionăm că mulţi autori au studiat modele generale de acest tip şi ,,le-au rezolvat”[§§§],

---

§§§ **Considerăm că este util să prezentăm anumite exemple excelente din punct de vedere teoretic, cum ar fi : Smith, W. L. On *the Dislribution of Queueing Times.* în : Froc. Cambridge Phil. Soc., 49, 1953, pp. 419 — 461 ; Takacs, L. *Irwestigation of Waiting-time Problems by Produc- tion to Markov Processes.* în: Acta Math. Acad. Sci. Hung., 6, 1955, pp. 101 — 129.**

din punct de vedere matematic. Cu alte cuvinte, ei a considerat modele de tipul *GI/G/1 :* (oo/FIFO) şi au exprimat repartiţiile timpilor de aşteptare şi a timpilor totali de aşteptare. De obicei, formulele obţinute corelează transformatele Laplace ale repartiţiilor timpilor de aşteptare şi a timpilor totali de aşteptare, cu tansformatele Laplace ale repartiţiilor timpilor dintre sosiri şi timpilor de servire. Ele nu sînt întotdeauna soluţii în sensul folosit de noi deoarece, cu excepţia formelor celor mai simple ale timpilor de aşteptare şi a timpilor de servire, transformatele Laplace nu pot fi inversate în mod efectiv. Este adevărat că sînt posibile evaluări numerice, dar de cele mai multe ori este foarte dificil a le obţine. Trebuie să menţionăm totuşi că majoritatea rezultatelor privitoare la modelele cu o staţie de servire ce vor fi discutate în acest capitol pot fi obţinute fără prea mari dificultăţi dintr-un model foarte general. Motivul pentru care nu vom proceda astfel constă în dorinţa de a prezenta şi alte tehnici ce sînt foarte utilizate.

3.2. MODELE CU TIMPI DE SERVIRE EXPONENŢIALI

3.2.1. *MIM/l:* (oo/FIFO)

Acesta este cel mai simplu model teoretic dintre cele ce au pretenţii de aplicabilitate. Vom reaminti caracteristicile lui, precum şi denumirile cîtorva parametri; astfel:

M Sosirile sînt aleatoare, dar au loc cu intensitate medie constantă (în această carte, unitatea de timp este minutul, în cazul în care nu este specificat altceva).

M Repartiţia timpului de servire este exponenţială negativă cu o valoare medie constantă, 1/p minute.

1 Există doar o staţie de servire.

oo Nu există vreo limită legată de lungimea şirului, clienţii nu sînt respinşi de sistem, iar odată aşezaţi în şirul de aşteptare nu-l mai pot părăsi.

FIFO Clienţii sînt serviţi în ordinea strictă a sosirilor.

Modelul este uşor de mînuit, datorită unei ciudate

Din păcate lucrările prezintă un grad ridicat de matematizare.

proprietăţi a repartiţiei exponenţiale negative, ceea ce Saaty numeşte „uitarea". Prin aceasta ne referim la faptul că dacă timpii de servire au această repartiţie, atunci probabilitatea terminării serviciului la un moment dat este independentă de durata serviciului. Consecinţa acestei proprietăţi este că, stabilind ecuaţiile pentru a releva modificările survenite în cadrul modelului, nu este necesar să ţinem seamă de cit timp a trecut de la momentul ultimei sosiri, nici cit de mult a trecut pînă cînd a început timpul curent de servire.

Vom introduce acum simboluri (o listă completă a simbolurilor utilizate se găseşte în Anexa 2). Probabilitatea de a avea o sosire pe parcursul unui interval de timp foarte scurt (Z, *t* + dZ) este XdZ. în mod similar, dacă notăm *ţi = 1/b,* atunci probabilitatea ca unei persoane să i se termine servirea pe parcursul intervalului de timp ales (presupunînd că au existat încă de la început persoane în curs de servire) este p. dZ. în fine, fie $p_n(t)$ probabilitatea ca la momentul Z să fie *n* clienţi în sistem. Probabilitatea $p_n\{t$ + dZ) ca sistemul să conţină *n* persoane la momentul Z + dZ are trei componente :

— Probabilitatea $p_n(t)$ ca sistemul să conţină exact *n* persoane la momentul anterior Z, înmulţită cu probabilitatea de a nu se înregistra nici o plecare sau sosire în intervalul de timp dZ dintre aceste momente. Cum dZ este foarte mic, această ultimă probabilitate este

$$1 — XdZ — u.dZ$$

iar contribuţia totală a acestei componente este

$$[1 - (X + p)dZ] \bullet p_{„}(Z).$$

— Probabilitatea *Pn-^t)* ca sistemul să conţină exact *n—1* persoane la momentul anterior Z, înmulţită cu probabilitatea *JJL* dZ a unei sosiri în intervalul dZ. (Cum dZ este foarte mic, probabilitatea ca să existe mai mult de o sosire este neglijabilă.) Contribuţia acestui termen este

XdZ • p„_! (Z).

— Probabilitatea ca sistemul să conţină *n* + 1 persoane la momentul precedent Z, înmulţită cu probabilitatea jxdt a unei plecări în intervalul dZ. (Probabilitatea mai multor plecări este neglijabilă.) Contribuţia acestui termen este

în consecinţă, forma generală a relaţiei este

$p_n(t + dt) = [1 - (X + [i)dt]\ p_n(t) + Xdt\ p_{„\_1}(t) + |idtp_{B+1}(t)$,

şi după o rearanjare a termenilor, împărţind prin dt şi trecînd la limită pentru dt tinzînd către zero, rezultă că

$$J$$
$$- Pn(t) = - (X + \qquad + Xp\hat{}t) + fip_{fi+1}(t) \qquad (3.1)$$
$$dt$$

care este adevărată pentru n > 1.

Pentru *n* = 0, ceea ce înseamnă că staţia este liberă (nu există nici o persoană care să aştepte şi nici una care să fie servită), avem

$$-7\text{-}P0W = - {}^{x}2»o(O + \hat{}i(0- \qquad (3.1a)$$
$$dt$$

Aceste ecuaţii diferenţiale constituie modelul matematic, care poate fi rezolvat, dacă se cunoaşte numărul de persoane aflate la coadă la momentul iniţial. Este mai convenabil să se ia momentul iniţial t = 0, deşi acest lucru nu este absolut obligatoriu. De exemplu, dacă ar fi *m* persoane la coadă la momentul 0, condiţiile iniţiale ar fi

$$p_m(0) = 1, \qquad p_„(0) = 0, n \neq m.$$

Cu această informaţie, ecuaţiile scrise mai sus permit

****** Cox şi Smith, pp. 61 — 64 : din nefericire rezultatul obţinut este eronat, datorită unei erori de derivare. A fost corectată in ultima versiuae.**

calcularea probabilităţilor $p_n(t)$ pentru orice t şi pentru toate valorile $n = 0,1, 2, ...$

Un caz important apare atunci cînd $m = 0$. Aceasta înseamnă că la momentul iniţial nu există clienţi în aşteptare şi deci staţia de servire este liberă. Condiţiile iniţiale sînt

$$2>o(°)= 1, \quad l>n(0)=0, n > 0.$$

Cea mai avantajoasă metodă de obţinere a unor relaţii explicite pentru p„(t) aparţine lui Cox şi Smith*. Această metodă învinge dificultăţile legate de faptul că ecuaţia (3.1 a) are o formă diferită faţă de cazul general, reprezentat de ecuaţiile (3.1).

înmulţind ecuaţiile (3.1) cu s", unde s este o variabilă arbitrară, continuă şi nenegativă, însumînd după valorile întregi ale lui n, — oo < co, şi introducînd funcţia generatoare dependentă de timp P(s, t), unde

$$P(s, t) = \sum_{-oo} PnW s^n,$$

atunci

$$\text{y } P(8, t) = [- (X + pi)« + (Xs + ,u/s)f]. \qquad (3.2)$$
$$\text{df}$$

P(s, t) va furniza soluţiile dorite, dacă mai adăugăm condiţia

$$Po(O = \underset{P-}{—P\text{-}iW\text{-}}$$

Soluţia generală ce dă funcţia generatoare a ecuaţiei (3.2) este

$$P(s, t) = K(s)\cdot\exp\left\{-(\lambda+\mu)t + \right. \qquad (X*+ (3\text{·}3)$$

unde $K(s)$ este o funcţie oarecare.

Termenul exponenţial din partea dreaptă poate fi însă scris sub forma de doi factori; al doilea factor se scrie

$$\exp\{(\quad \text{Xs+ -)4}^{=}\ \text{S /n(2^X,u) (Xs/.ur}^2,$$

unde /„(2//x pi) este o funcţie Bessel de argument imaginar. Pentru prescurtare vom nota argumentul 2f|/ X pL cu *x* şi vom reaminti că X/pu este intensitatea traficului, notată de obicei cu p. Atunci P(«, t) = K(s) exp{—(X + pi)t} £ $I_n(x)$ $(p8)^n>^2$.

Presupunem că *K(s)* — £ $I_r s^r$. Să înlocuim această expresie în re- $\overset{n=-\infty}{T}$ ~ - QO laţia de mai sus şi să egalăm coeficienţii puterilor lui s. Din condiţiile iniţiale $p_o(O) = 1$ şi p„(0 = 0 pentru $n > 0$ şi proprietăţile funcţiilor Bessel [$Z_o(O) = 1$ şi Z«(0) = 0, $n > 0$], rezultă

$$= 1, \hat{A}_r = 0 \text{ pentru } r = 1, 2, \ldots$$

în consecinţă,

$$p_a(t) = \exp\{- (X + jx)\ t\}\ [\ p^{\text{“'}2}\ I_{\text{„}}(x) + £\ k_T\ ?^{ln+r}\ \hat{}\ I_{n.r}\ (x)\ \bullet$$

Valorile k_r sînt determinate astfel incit să asigure satisfacerea condiţiei $p_0(t) = pp\text{-}x(t)$. înlocuirea directă, urmată de egalarea coeficienţilor funcţiilor $I_r(x)$, arată că

$$\text{fci= p *, } k_2 \text{ — (1 p) p *, } k_3 = \text{(1 p)p ■ etc.}$$

Ca urmare, in final vom obţine probabilităţile dependente de timp, de forma

$$p_n(t) = \exp\{— (X + [x)/\}x$$

$$\text{X [>}^2\ I_{\text{„}\{x)} + \text{p}^{\text{,n-I,/2}}\text{I}_{\text{n+1}}(\hat{}) + \text{P"(l - P) Ş p-}^{\text{,w+r,/2}}\text{l}_{\text{B+r}}(\hat{})\text{j} \quad (3.4)$$

Relaţia este adevărată pentru toţi p nenegativi (chiar şi pentru p>l).

Pus în faţa acestei relaţii, cititorul, avînd în minte ideea

că acest sistem este cel mai simplu dintre toate, va avea poate un sentiment de panică. Acest sentiment va creşte cu siguranţă dacă va ieşi la iveală faptul că soluţia dată descrie doar creşterea şirului de aşteptare (exprimată în număr de clienţi ce aşteaptă), nespunîndu-ne nimic despre timpii de aşteptare a clienţilor. Pentru a-i obţine şi pe aceştia va trebui să considerăm expresii de formă mult mai complicată.

Dacă acestea sînt dificultăţile găsirii soluţiei pentru modelele cele mai simple, ce se va întîmpla cu modelele mai complicate ? Răspunsul a această întrebare este dat de prima regulă de lucru din teoria aşteptării: soluţiile dependente de timp pentru modelele de aşteptare sînt sau imposibil de obţinut sau imposibil de manipulat.

Este însă liniştitor să constatăm că ocaziile în care se apelează la cercetători operaţionali pentru a analiza sisteme de aşteptare de acest fel sînt foarte rare. De asemenea, sînt rare cazurile în care se cere să se studieze un proces tocmai în decursul modificării prametrilor de sosire sau de servire. De obicei, nu se cere să se facă o analiză a sistemelor de aşteptare pînă nu s-au descoperit dificultăţile procesului, şi de aceea, prin definiţie, a trecut deja o perioadă de timp. Lăsînd deoparte acest mod simplist de a privi lucrurile, trebuie să constatăm că de fapt cea mai mare parte a problemelor practice legate de sistemele de aşteptare nu prea au tangenţă cu comportarea tranziţională. în cazul în care staţiile de servire şi/sau clienţii sînt oameni, perioadele de început sînt marcate de o asemenea instabilitate a repartiţiilor timpilor de servire, încît este practic imposibil să se apeleze la analiza matematică. în mod frecvent, repartiţiile timpilor dintre sosiri sînt şi ele instabile în aceste condiţii. Ar fi deci absurd să cerem să aplicăm o soluţie exactă a modelului în astfel de circumstanţe. De aceea, în cele ce urmează, exceptînd un singur caz, nu vom mai acorda atenţie soluţiilor dependente de timp şi formelor riguroase ale comportării tranziţionale. Iar atunci cînd va fi necesar să studiem astfel de probleme, vom utiliza metoda de aproximare sau tehnici de simulare.

Problemele majore ce se pun aici sînt de forma : oare

cîte staţii de servire sînt necesare, presupunînd că ele lucrează cu o intensitate normală? Intensităţi normale de obicei nu apar deloc în perioadele de început. Aceasta, ca şi dificultăţile matematice, explică de ce cea mai mare parte a studiilor făcute asupra sistemelor de aşteptare au fost dedicate sistemelor ce se află în echilibru statistic††††.

Un sistem de aşteptare se află *in echilibru statistic* dacă probabilitatea existenţei a *n* persoane în sistem (pentru orice *n > 0)* este independentă de timpul ce a trecut de la începerea procesului. Cu alte cuvinte :

$$Pn(t) = Pn-$$

Aceasta nu este, poate, cea mai elegantă definiţie, dar ne va fi suficientă. Cititorul va observa că o altă formă de a exprima cele de mai

---

†††† **Echilibrul statistic, sau starea stabilă, sau condiţiile staţionare, slnt riguros prezentate în Feller, pp. 356.**

Vezi Syski (cap. 2, nota 4), pp. 13—14 pentru o analiză a măsurii traficului.

sus este de a spune că în echilibrul statistic (sau de *starea stabilă)* avem

$$—p_n(t) = 0,\ n > 0.\ \text{di}$$

Astfel, în cazul nostru simplu, modelul se reduce la

(3.5)

$$(X + p.)p_n = Xp_{B\_}! + p.p_{n+1};\ n > 1. \qquad (3.6$$

Aceste ecuaţii pot fi uşor rezolvate, dînd :

$$Pn = (1 — p)\ p”,\ n = 0,1, ..., \qquad (3.7$$

unde p = X/[i este *intensitatea traficului* măsurată în unităţi internaţionale de măsurare a traficului numite *erlangi*.* Repartiţia lungimii şirului de aşteptare este geometrică. Este limpede că aceasta este o funcţie de repartiţie numai în cazul în care p este mai mic decît 1. Cu alte cuvinte, echilibrul statistic există numai în condiţiile în care intensitatea traficului este mai mică decît 1, adică atunci cînd staţia de servire poate, în medie, servi clienţii mai repede decît sosesc ei. Aceste aspecte evidente nu necesită o justificare matematică. De asemenea, este clar că dacă clienţii sosesc mai repede decît poate să-i servească staţia, şirul se va lungi continuu, iar probabilitatea ca şirul de aşteptare să aibă o lungime dată va depinde de timpul scurs. Nu este atît de evident că în cazul în care intensitatea sosirii şi intensitatea de servire sînt egale, adică atunci cînd p = 1, echilibrul statistic este din nou imposibil. Dar, în cazul în care p= 1, în expresia de mai sus p_n sînt toţi egali cu zero şi, fără îndoială, nu dau o funcţie de repartiţie.

Următoarea noastră sarcină este de a exprima repartiţiile timpului total de aşteptare şi a timpului de aşteptare în şir.

Transformata Laplace a repartiţiei timpului de servire este

[x (e^{-lt}‘ $e\sim^{zl}$ di =--------

Jo **[X + 2**

în consecinţă, transformata Laplace a sumei de *r* astfel de repartiţii este $\left(\frac{\mu}{\mu + z}\right)^r$

Ca urmare, transformata Laplace a timpului total de aşteptare este

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r \left(\frac{\mu}{\mu + z}\right)^{r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} (1 \quad p) p^r \left(\frac{\mu}{\mu + z}\right)^r \quad - p) (*(i — p) + z'$$

însă aceasta este tocmai transformata Laplace a expresiei

$$((i - X)e-<->->', \qquad (3.8$$

care este *densitatea de repartiţie a timpului total de aşteptare.*

Timpul mediu de aşteptare este obţinut prin diferenţierea transformatei Laplace şi făcînd apoi $z = 0$ din cauză că transformata Laplace este funcţia generatoare a momentelor; astfel:

$$H(1 — P)$$

în mod similar se obţine repartiţia timpilor de aşteptare în şir. Ea are valoarea 1 — p în 0 şi, pentru $t > 0$, este dată de densitatea de repartiţie $p(X — p)\, e^{-(X-1)(}$.

3.2.2.REPARTIŢIA PERIOADEI OCUPATE

Perioada ocupată este, în terminologia matematică a aşteptării, intervalul de timp care începe atunci cînd soseşte un client care nu găseşte pe nimeni în faţa lui şi se sfîrşeşte cu prima ocazie cînd, la plecarea unui client, acesta nu lasă pe nimeni în urma sa. Nu este deloc acelaşi lucru cu *„ora de aglomeraţie"* care semnifică perioada în care intensitatea sosirilor este foarte ridicată. Această deosebire trebuie

reţinută, deoarece expresia *perioadă ocupată* va fi utilizată din cînd în cînd şi în acest ultim sens.

Care este repartiţia perioadelor ocupate? Aproape că am şi determinat-o. Este dată de $(d/dt)p_0(t)$, căci aceasta măsoară frecvenţa de apariţie a unei situaţii fără aşteptare. Ştim că

$$-Ţ-\hat{}o(<) = -W0 + \hat{}1(0, dt$$

iar pe $p_0(t)$ şi $p_x(t)$ i-am obţinut deja. Se poate arăta imediat că

— Po(C = — A(®)J- Utilizînd următoarea proprietate a
dt
funcţiilor Bessel:

$$— I_{„}(a?) = I_{n+1}(x) —$$
$$X$$

formula de mai sus se reduce. Astfel, densitatea de repartiţie a perioadelor ocupate devine

$$\frac{\exp\{-(X + pjQ \bullet I_1(2t]/\sim Xţi)}{P} \quad ($$

Fără îndoială că aceasta este o expresie suficient de sofisticată dar nu neapărat imposibil de manipulat. Ea este însă destul de complicată pentru a ne sugera faptul că derivata repartiţiei perioadelor ocupate nu se obţine prea uşor pentru modelele mai complicate. De asemenea nici formulele nu par a fi foarte uşor de manipulat. Poate cititorul se va întreba, în acest moment, care este importanţa cunoaşterii repartiţiei perioadei ocupate. Ca să fim sinceri, repartiţia perioadei ocupate nu prezintă un interes deosebit. Vom vedea însă că unul dintre rezultatele intermediare care s-au obţinut va fi deosebit de util.

3.2.3. A//3//1 : (oo/SIRO)

Analiza acestui model este asemănătoare celui anterior, pînă în momentul în care trebuie determinată repartiţia timpului de aşteptare. Aceasta este evident, deoarece în deducerea repartiţiei mărimii şirului de aşteptare nu s-a făcut nici o menţiune legată de disciplina de aşteptare. în orice caz, deducerea repartiţiei timpului de aşteptare din repartiţia mărimii şirului de aşteptare, în cazul disciplinei SIEO, nu este o chestiune uşoară. Pentru a o face, este necesară utilizarea unui nou simbol:

?»(£) — probabilitatea ca un client, care atunci cînd soseşte găseşte deja *n* alţi clienţi în aşteptare, este încă în şir şi după ce a trecut un interval de timp t.

Să presupunem că clientul nostru soseşte la un moment dt în loc de 0 şi să considerăm următoarele evenimente ce au putut avea loc în acel scurt interval de timp ; găsim astfel:

Evenimentul (In Intervalul dO	Probabilitatea	Probabilitatea de aşteptare In şir
1. Sosirea unui alt client	**X dt**	**g_{n+} ,(t - dt)**
2. Unul din ceilalţi clienţi să fie servit, după clientului precedent care fost deja servit	**P^n .. d/ n + 1**	**9n_l(t - dt) (Notă: la momentul dt In şir se află clientul nostru şi alţi n — 1 clienţi)**
3. Nici o plecare şi nici o sosire	**[1 - (X + (JL) dt]**	***q_n(l* - dt)**

Aceste elemente se combină între ele, ca în exemplul anterior; după împărţirea prin dt şi trecerea la limită se obţin următoarele ecuaţii de dependenţă a lui q_n de timp :

$$\frac{d}{dt}\,\hat{\imath}\text{»}(0 = \frac{n}{n+1}\hat{}_{n}\text{-l(C} + X\hat{\imath}\text{„}_{+}\ i(t) - (,R + X)\ g\text{„}(t),\ W>1, \quad (3.10)$$

$$-\hat{}\text{-}\hat{i}o(0 = X\c{t}Z_i(t) - (p + X)\, g_0(t). \quad (3.11)$$
dt

Condiţiile iniţiale sînt $g_{„}(0) = 1$ pentru toate valorile lui *n,* deoarece oricît de devreme s-ar aşeza clientul nostru în şir, este sigur că el va sta acolo cel puţin un interval de timp zero.

Vom presupune de asemenea că intensitatea medie de servire este superioară intensităţii medii a sosirilor, adică $p < 1$, astfel încît clientul nostru va fi sigur că — mai devreme sau mai tîrziu — va fi

servit (se poate presupune că aceasta se va întîmpla mai tîrziu) şi că lim $q_n(t) = 0$.

Problema este de a calcula $q_n(t)$ şi acesta este momentul în care se pierde entuziasmul iniţial. Nu vom schimba tradiţia făcînd aceste calcule. Totuşi, să presupunem valorile $q_n(t)$ cunoscute, în care caz probabilitatea ca orice client să aştepte cel puţin o perioadă t este

$$G_Q(t) = (1 - p) \pounds_P^{n+} (Z).$$

Am ţinut seamă de faptul că repartiţia mărimii şirului este independentă de disciplina de aşteptare.

Nu este uşor de a face o analiză mai detaliată utilizînd pe $G_s(t)$. O altă cale este de a considera funcţia $Q(t)$, probabilitatea unei întîr- zieri de durată cel puţin t în servirea unui client deja întîrziat: aceasta exclude din calcul acei clienţi care sînt serviţi imediat.

Această expresie poate fi extinsă în serie de puteri ale lui pt, prin derivarea repetată a ecuaţiilor (3.10) şi (3.11). Această procedură a fost descrisă de Palm ‡‡‡. în acest mod, se poate arăta că timpul mediu de aşteptare în şir este

$$\frac{g}{(1 - P)}$$

Este exact acelaşi ea şi în cazul modelului bazat pe regula FIFO. Disciplina şirului nu afectează media timpului de aşteptare (sau media timpului total de aşteptare).

Cea mai utilă aproximare §§§§ a probabilităţii $Q(t)$ ca o unitate din şir să aştepte mai mult de t intervale de timp o constituie aproximarea lui Riordan :

$$Q(t) \approx \frac{1}{2} \exp\{-\alpha(\mu - \lambda)t\} + \frac{1}{2}\beta \exp\{-\beta(\mu - \lambda)t\}, \quad (3.12)$$

unde

---

‡‡‡ **Vezi Palm, C. *Research on Telephone Tiaffic Carried by full-availability Groups.* TELE, English Edn, 1957.**

§§§§ **Riordan, J. *Delay Curves for Calls Served al Random.* în : Beli System Tech. J., 32, 1953, pp. 100 — 119, vezi anexa 3. Graficul A2 —7, deşi reprodus dintr-o altă sursă, este elementul fundamental al lui Riordan, cuprinzlnd rezultatele cercetărilor efectuate de acesta.**

$$+\sqrt{\frac{\rho}{2}}, \quad \beta = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{2}}$$

3.2.4. *M/M/l :* (OQ/LIFO)

Funcţia de repartiţie a numărului de clienţi în şir este în acest caz similară celei din cazurile precedente. Aceasta înseamnă că, în starea de echilibru, în particular :

$$Pn = (1 - p)p".$$

Nu acelaşi lucru se poate spune şi despre repartiţia timpului total de aşteptare. Dacă putem considera regula FIFO a disciplinei de aşteptare ca fiind cea mai echitabilă pentru clienţi, atunci cea mai neechitabilă este regula LIFO : ultimul venit, primul servit. Care *este* în acest caz repartiţia timpului total de aşteptare? Răspunsul la această întrebare necesită o analiză foarte detaliată. Să presupunem că un client soseşte şi se aşază în şir. Timpul lui de aşteptare nu va fi afectat de numărul persoanelor existente în aşteptare, deoarece conform regulii LIFO, el va fi servit înaintea celorlalţi. Timpul lui va depinde numai de numărul clienţilor care sosesc *după* el şi *înainte* ca el să înceapă să fie servit.

Cititorul îşi va reaminti repartiţia perioadelor ocupate, pe care am dedus-o pentru modelul Jf/Jlf/l :(oo/FIFO); o scurtă reflecţie îl va convinge că e aceeaşi cu repartiţia timpului total de aşteptare în cazul modelului pe care-1 analizăm. Să urmărim raţionamentul pe care se bazează această afirmaţie. Un client — *subiectul* —sosind, găseşte *n* persoane aşteptînd, incluzîndu-1 pe cel care este servit. El se duce în capul şirului. Pe perioada care trece de la sosirea sa şi piuă cînd va fi servit, pot sosi şi alţi clienţi; în acest caz, ei îl vor preceda în şir. Cu alte cuvinte, subiectul va începe să fie servit în momentul în care un client care pleacă lasă tot *n* persoane în şir. Deci repartiţia timpului total de aşteptare în modelul Jf/Jf/1 :(oo/LIFO) este repartiţia „perioadei ocupate", începînd cu momentul în care se găsesc *n* persoane în şir şi terminînd cînd numărul celor din şir este din nou egal cu *n.* Tranziţiile de acest fel

sînt independente de *n,* aşa încît perioadele ocupate sînt aceleaşi pentru regulile FIFO şi LIFO. Cititorul va observa că dacă timpul de servire este repartizat exponenţial, atunci timpul care trece între momentul sosirii subiectului şi momentul servirii lui este de asemenea repartizat exponenţial. Prin urmare, momentul sosirii subiectului nu are importanţă; timpul de aşteptare este exact acelaşi cu al întregii perioade ocupate, generate de un timp complet de servire.

De aceea, densitatea de repartiţie a timpului total de aşteptare este

$$\exp\{-(X + ,u)r\}\text{-}Z_1(2<X.u) \quad \text{ifp} \quad \bullet \qquad (3,13)$$

Cititorul va putea arăta direct că durata medie a unei perioade ocupate este l/[p.(l — p)J, astfel incit timpul mediu de aşteptare în modelul nostru este dat de

$$W = \frac{1}{.u(1 - P)} . \qquad (3.14)$$

Să subliniem din nou faptul că timpul mediu de aşteptare intr-un model JZ/JZ/1 este independent de disciplina de aşteptare.

Cox şi Smith* au realizat o deducere foarte ingenioasă a duratei medii a perioadelor ocupate. Timpul de lucru al staţiei de servire alternează între perioade ocupate şi libere. Cînd sosirile sînt aleatoare, o perioadă liberă are şansa XdZ de a se sfîrşi intr-un interval scurt *ăt.* Urmează deci că durata perioadelor libere este repartizată exponenţial cu media 1/X sau *a.* Independent de natura repartiţiei timpului de servire, probabilitatea ca staţia să fie liberă este 1 — p. Considerînd o perioadă foarte lungă, *T,* staţia este liberă pentru durata T(1 — p) şi în acest timp există XT(1 — p) perioade libere. De asemenea, trebuie să fie XT(1 — p) perioade ocupate, însă pentru o durată Tp. Prin urmare, durata medie a unei perioade ocupate este

$$\frac{T}{1\ XT(1 - p)} \quad \text{fi}(l - p)$$

Astfel, am ajuns din nou la timpul mediu de aşteptare

pentru modelul nostru.

3.3. MODELE CU TIMPI DE SERVIRE NEEXPONENŢIALI

Concluziile trase în secţiunea precedentă ne conduc la studiul modelelor cu o staţie de servire, în care repartiţia timpului de servire are altă formă decît cea exponenţială. Exceptînd două cazuri, nu

Cox şi Smilli, p. 58. vom îngreuna expunerea prin examinarea deducerii rezultatelor pentru modele de acest gen, căutînd doar să rezumăm aceste rezultate. Excepţiile sînt menite a ilustra două feluri de argumente, utile în dezvoltarea ulterioară a modelelor de aşteptare.

3.3.1. M/G/l : (oo/GD)

Intensitatea medie a sosirilor este din nou *k* şi cea a servirii fi. Vom presupune că intensitatea traficului este din nou mai mică decît unitatea. Apoi, vom considera numărul clienţilor existenţi în sistem, imediat după o plecare a unui client din sistem.

Presupunem că un client care părăseşte sistemul lasă în urma sa *n* alţi clienţi în sistem, incluzîndu-1 pe cel care este servit şi al cărui timp de servire va f i *t;* mai presupunem că sînt *r* noi veniţi în perioada *t,* astfel încît numărul *n'* existent în momentul următoarei plecări din sistem este

$$n' = \max(n - 1, 0) + r = n + r - 1 + 3(n), \qquad (3.15)$$

unde *8(n)* = 0, *n>0, 8(0)* = 1. Apare astfel evident că $[ă(n)]^2 = — 8(n)$ şi n[l — ă(n)] = *n.* în echilibru statistic, dacă numărul mediu de persoane care aşteaptă este *n,* atunci *n = n'.* în mod similar D(n) = D(n'). Prin urmare, pe parcursul timpului de servire de durată *t*

$$8(n) = 1 - r = 1 - kt$$

Şi

$$D(r) = X^2/^2 + kt.$$

Deoarece timpul mediu de servire este 1/p., avem

$$r = X/p. = p.$$

Probabilitatea a *r* sosiri este independentă de *n* şi de *8(n).* Aplicînd regulile statistice obişnuite privind valorile medii ale produsului de variabile independente, avem

$$M[r^2] = X^2\ D(i) + p^2 + {}_{P}.$$

De asemenea,

$$n'^2 = n^2 - 2n(l - r) + (r - l)^2 + S(2r - 1)$$

care, în stare de echilibru, dă

$$M[n'^2] - M[n^2] = 2M[n]\,M[r - 1] + M[(r - l)^2] + \\ + M[8(n)] \bullet M[2r - 1],$$

relaţie care poate fi combinată cu relaţiile anterioare şi din care se obţine

$$\frac{\blacksquare\ p^2 - X^2\,D(t)}{2(1 - P)} \qquad (3.16$$

pentru numărul mediu de persoane existente în sistem în momentele de după *plecări.* Acesta nu poate diferi cu mai mult de o persoană de numărul mediu de persoane prezentate la un moment dat. Este uşor de arătat că media timpului de aşteptare este

$$w = \frac{p^2 + X^2 D(t)}{P\ 2X(1 - p)} \qquad (3.17$$

Argumentul care conduce la acest rezultat este acela că numărul mediu de sosiri pe parcursul timpului mediu de aşteptare este $X(W_9 + 1/p.)$, pe care îl egalăm cu *n.* Aşadar :

de unde rezultă (3.17).

$$x(jy_a + î/ji) = {}_P \qquad . \frac{p^2 + X^2\,D(t)}{2(1 - p)},$$

Aceste rezultate sînt cunoscute ca formulele Pollaczek-Hincin. Ele se utilizează pentru examinarea efectelor

diferitelor repartiţii ale timpilor de servire.

3.3.2. $M/E_k/1$: (oo/FIFO)

Doar modelele cu sosiri aleatoare şi repartiţii exponenţiale negative ale timpului de servire conduc la ecuaţii liniare simple. Pentru a'.te tipuri de repartiţii, sistemul de ecuaţii este de obicei mult mai complicat şi în general el nu poate fi rezolvat explicit cu ajutorul unor funcţii simple. Majoritatea proceselor de aşteptare care au loc nu au repartiţii exponenţiale ale timpului de servire. Ce este atunci de făcut, pentru a crea modele uşor de analizat pentru asemenea procese?

Karl Erlang, în lucrarea sa de pionierat, sugerează un răspuns la această problemă. El observă că cea mai mare parte a repartiţiilor neexponenţiale ale timpului de servire pe care le-a întîlnit pot fi aproximate prin funcţia de repartiţie cunoscută sub numele de repartiţia Euler, repartiţia Pearson de tipul III, repartiţia x^2, repartiţia Erlang şi repartiţia gamma. (Ar fi interesant de aflat explicaţia creşterii numărului de astfel de nume.) Vom utiliza densitatea de repartiţie, egală cu

$$\frac{(fc\lambda)^{fc}}{(fc-1)!}\,t^{fc-1}e^{-fc\lambda t}$$

Aşa după cum am văzut (cap. 2) aceasta este repartiţia sumei a fc variabile aleatoare, fiecare repartizată exponenţial cu media l/(p./c). Erlang şi-a dat seama că un mecanism de servire cu o astfel de repartiţie poate fi conceput ca fiind format din *k* etape în serie, fiecare etapă fiind o staţie de servire exponenţială. El nu a afirmat că mecanismul de servire necesită o structură în *k* faze; tot ceea ce este necesar pentru scopuri analitice este ca acesta ar putea să se comporte *ca şi cum* ar fi aşa.

Cititorul va vedea că dacă un model poate fi construit pe baza elementelor exponenţiale, ecuaţiile ce trebuie să fie rezolvate vor fi mult simplificate.

Regulile care guvernează activitatea unei faze-tip a mecanismului de servire cu *k* faze (sau etape) sînt:

1. Numai un client poate fi servit la un anumit moment dat de staţia de servire.

2. Fiecare client trebuie să străbată fiecare fază a serviciului, începînd cu prima.
3. După terminarea unei faze, clientul se deplasează imediat la faza următoare.

4. Atunci cind un client părăseşte faza *k,* următorul client poate intra în faza 1, dai' nu înainte.

Cititorul va remarca că aceasta nu este acelaşi lucru cu *k* servicii în serie, deoarece în cazul de care ne ocupăm, numai un client poate fi servit la un anumit moment dat, în timp ce în celălalt caz puteau fi implicaţi în mecanismul de servire pînăla *k* persoane. Datorită acestei condiţii date de regula 1, putem considera cele *k* faze echivalente cu o singură operaţie.

Modelul de aşteptare M/£$_t$/l : (oo/FIFO) poate fi studiat utilizînd metoda Erlang. Un mod de a stabili ecuaţiile constă în a nota probabilitatea ca la momentul *t* să existe *n* clienţi prezenţi iar clientul care este servit să se afle în faza *i,* cu simbolul $p_{ni}(t)$. Aceasta este totuşi o complicaţie inutilă. Este preferabil să notăm cu $p_n(t)$ probabilitatea sil existe *nfaze* de aşteptare şi de servire la momentul *t;* astfel, fiecare client nou sosit va face să crească numărul de faze existent cu *k,* şi ori de cîte ori o fază este completată, numărul lor este redus cu o unitate.

Ecuaţiile stării stabile pentru această situaţie pot fi construite in maniera obişnuită, examinînd toate posibilităţile. Aceste ecuaţii sînt :

(3.18)

$$(X + = *fip_{n+1} + Xp_{„\_t}, \; n > 1. \qquad (3.19)$$

Funcţia generatoare poate fi dedusă din aceste ecuaţii în mod obişnuit, prin înmulţirea membrului sting al ecuaţiei în p_n cu s" şi însumînd după valorile lui *n,* de la 0 la oo. Astfel:

$$F(s) = \frac{Pa}{1 - s} = \frac{A>(1 \sim s)}{1 - s - ps\,(1 - s)^{fc}} \qquad (3.20$$

Deoarece P(l) = 1, prin definiţia funcţiei generatoare $p_0 = 1$ — fcp. în aceste expresii p este interpretat ca fiind X/(A;p), adică intensitatea traficului fiecărei faze individuale şi nu este intensitatea traficului total X/pt, corespunzător întregului mecanism de servire.

Nu este dificil, fiind doar calcule algebrice anevoioase, să determinăm expresia lui p_n din funcţia ei generatoare. De fapt,

coeficientul lui s” dă

$$= \qquad (3.2!)$$

unde însumarea trebuie făcută după toate partiţiile lui *n,* conform relaţiei *n = j + ik + m.* După alte calcule se găseşte numărul mediu al clienţilor în sistem la un moment dat:

$$n = \frac{}{2}\,\frac{}{1 - (X/p.)\,k} \qquad (3.22)$$

Repartiţia Erlang sau Pearson de tipul III, care reprezintă repartiţia timpului total de servire în cele *k* faze, are evident valoarea medie 1/p şi dispersia (l/fc)(l/[i^2). Prin urmare, dacă coeficientul de variaţie este notat cu V_t, atunci *VI = Ijk.* Aşadar, vom avea

şi formula pentru numărul mediu de clienţi din sistem poate fi scrisă
astfel:

$$n = \frac{1\ (1 + VI)}{2} \qquad 1 - (X/p)$$

care este exact rezultatul dat de formula Pollaczek-Hincin. Este o verificare utilă a rezultatului, mai cu seamă că interpretările legate de semnificaţia lui p_n sînt diferite în cele două situaţii. în deducerea formulei Pollaczek-Hincin, p_n a fost ales ca fiind probabilitatea ca la plecarea unui client, acesta să lase pe altcineva în urma sa. în situaţia noastră, p_n a fost considerat a fi proporţia timpului pentru care vor fi prezenţi *n* clienţi în sistem.

Timpul mediu de aşteptare este dat de

$$W_q = \frac{1}{2\mu}(1 + V_t^2) \qquad \frac{(X/tx)}{1 - (X/fi)},$$

(3.23) Este limpede că în condiţiile în care *Ic* tinde la infinit, va tinde către zero, iar formulele vor da rezultate pentru timpii de servire *constanţi.*

Repartiţia timpului de aşteptare poate fi obţinută considerînd că *n* reprezintă numărul fazelor existente în sistem şi că fiecare fază este exponenţială. Timpul total de aşteptare pentru ultimul client, considerînd ca disciplină de aşteptare regula FIFO, este suma a *n* variabile exponenţiale, fiecare avînd media 1/p. Deci transformata Laplace a repartiţiei timpului de aşteptare este dată de relaţia

$$W_q^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{1}{1 + z/\mu} \right)^n .$$

Reamintind că *P(s)* este funcţia generatoare a lui p_n, aceasta este echivalentă cu

$$P\left(\frac{1}{1 + z/\mu}\right) \qquad (3.24) \quad .$$

Momentele repartiţiei timpului de aşteptare pot fi calculate din această expresie, prin derivare repetată, în raport cu z şi făcînd $z = 1$ în rezultate. Această inversare a transformatei Laplace ar fi de un risc enorm, chiar folosind tehnicile aproximative. De aceea, repartiţia timpului de aşteptare nu este uşor de obţinut, exceptînd cazurile în care numărul fazelor este relativ mic (să spunem, $k = 2$ sau 3)*.

3.4. MODELE CU TIMPUL DE SERVIRE CONSTANT

3.4.1. *Min/1* **: (oo/FIFO)**

în capitolul următor ne vom ocupa sumar de analizele făcute de Crommelin asupra modelului *M/D/c* : (oo/FIFO); fiind un caz special al acestui model, anume pentru c = 1, nu vom insista îna demonstra rezultatele ce vor urma.

Vezi Morse, pp. 72 — 82.

Funcţia generatoare pentru acest model cu o staţie de servire este

(3.25)

Prin derivarea de *n* ori în raport cu «, împărţind apoi prin *n* şi făcînd s = 0, obţinem

$$p_0 = i - p; \quad P_i = (i - p)(t^p - i); \tag{3.26}$$

$$P_{,.} = (1 - P) \times (-l)^{-fc} e^{\hat{A}p} \quad \frac{(k_{?}y^{-k} \underline{\text{tip}})^{-1}}{(n - Ic)!} \quad \frac{}{(n-k-1)!} \quad \text{pentru } n$$

Aceasta este forma generală a soluţiei stării stabile. Prin derivarea în raport cu s a funcţiei generatoare, punînd apoi s = 1, obţinem că numărul mediu de clienţi în sistem este

$$n = 1 + \frac{-}{2} \frac{—\bullet}{1 — p}$$

Deci timpul mediu de aşteptare în şir şi timpul mediu total de aştep-

tare pot fi deduse uşor :

$$\frac{W,- -^{1}- p}{2(i\ 1 —p} \quad , \quad \frac{W^{1} - 1}{2(i\ 1 - p}$$

Repartiţia timpului de aşteptare poate fi obţinută şi în forma

$$W_5(Ţ) = (1 - p) \times e^{\wedge'-*'} \quad \sim \quad i' \tag{3.27}$$

i“o

Acest model este deosebit de util, deoarece există numeroase situaţii reale în care coeficientul de variaţie a repartiţiei timpului de servire este destul de mic, astfel încît

timpul de servire poate fi considerat ca fiind constant. în cadrul acestei cărţi vom avea ocazia să studiem cel puţin un astfel de caz.

3.4.2. *M/D/l* : (oo/SIRO)

După cum arătam, în cadrul multor fenomene cotidiene, regula FIFO a disciplinei de aşteptare nu este respectată; de exemplu în încercarea de a lua maşina în timpul orelor de vîrf, de a cumpăra alimente dintr-un magazin etc. în astfel de circumstanţe, ordinea de servire degenerează în aleatoare şi devine posibilă aplicarea regulii SIRO. De aceea, modelul prezent care combină timpii constanţi de servire cu servirea în ordine aleatoare devine uneori foarte folositor.

Dacă nu se cunoaşte cu exactitate disciplina de aşteptare, este indicat a prelucra rezultatele atît de la modelul Jf/D/1 :(oo/FIFO) cit şi de la *M/D/l* :(oo/SIRO) şi de a le considera ca fiind limitele extreme ale unui rezultat corect. Acestea au fost consideraţiile care l-au condus pe Burke ***** să cerceteze acest model. Lucrarea sa nu prezintă numai o analiză teoretică ci, de asemenea, un util set de grafice care indică :

1. Probabilităţile |1 — $W_{\#}$(®/6)| pentru valori mai mici decît 1306.
2. Comparaţia timpilor de aşteptare pentru cele două modele Jf/D/1 : (oo/FIFO) şi Jf/D/1 :(oo/SIRO).
3. Comparaţia timpilor de aşteptare pentru cele două modele (Jf/Jf/1: (oo/SIRO) şi Jf/D/1 :(oo/SIRO).

înainte de a prezenta analiza făcută de Burke, vom rezuma concluziile acestor grafice. în primul rînd, comparaţia 2 indică, aşa cum ne aşteptăm, că regula SIRO determină o repartiţie a timpilor de aşteptare de alt fel decît regula FIFO. Există mai mulţi timpi scurţi şi lungi şi mai puţini în mijlocul domeniului repartiţiei (ceea ce este fără îndoială adevărat pentru aceste reguli). Această deosebire merită

***** **Burke, P. J. *Equilibrium Delay Dislribution for One Channel ivilh constant Hel- ding Time Poisson Input and Random Service.* în : Beli System Tech. J., July, 1959. Graficele din lucrarea lui Burke sint reproduse In această carte în anexa 2, graficele A2-1-A2-4.**

luată în considerare. Ea este foarte mică pentru durate scurte, adică pentru timpi de aşteptare pînă în punctul în care curbele celor două modele se intersectează. Dar deosebirea creşte pronunţat pe măsura creşterii timpilor de aşteptare. De exemplu, la o intensitate a traficului de 0,7, probabilitatea unui timp de aşteptare egal cu 10 timpi medii de servire este de zero ori mai mare pentru modelul SIRO, faţă de FIFO. La o intensitate a traficului de 0,8, probabilitatea unei întîrzieri similare este mai mică de trei ori pentru SIEO faţă de FIFO. Pentru p = 0,9, probabilităţile sînt aproape identice.

Comparaţia 3 făcută de Burke este extrem de interesantă, deoarece ea conduce la o foarte utilă regulă de lucru. Pentru orice nivel dat al probabilităţii, timpul corespunzător de aşteptare pentru un timp constant de servire este aproximativ egal cu jumătatea celui determinat pentru modelul cu timp exponenţial de servire. Cîteva exemple sînt date în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Comparaţie intre *M/M/l* : (ao/SIRO) şl *M/D/l* : (oo/SIRO)

Nivelul probabilităţii	p	*v* pentru timpi constanţi de servire	*v* pentru timpi exponenţiali de servire
0,1	**0,9**	**12(i**	**24(i**
0,1	**0,6**	**2,5(i**	**5[i**
0,01	**0,9**	**37(i**	**78(i**
0,01	**0,6**		**14(i**
0,001	**0,8**	**32(i**	**66(i**
0,001	**0,6**	**12(i**	**27(i**

Deducerea repartiţiei timpilor de aşteptare făcută de Burke începe cu ecuaţia Crommelin pentru c = 1 :

$$= (Po + Pi) \bullet \frac{\check{A}^{B\_1}\, e^{-x}}{(n - 1)!} + \bullet \bullet . + Pn\, e^{"x}.$$

El introduce apoi probabilitatea condiţionată *q(t|n),* ca timpul de aşteptare să nu fie mai mare decît *t* în cazul în

care clientul care aşteaptă este unul din cei *n,* la momentul următor unei plecări. Fie *F(t)* repartiţia timpilor de aşteptare. Atunci

$$F(t) = \underset{n=l}{Pn\text{-}!q(t|n)}$$

şi problema este de a evalua *q(t | n).*

Intervalele de timp dintre o sosire şi prima plecare din sistem trebuie să fie repartizate uniform deoarece intrările sînt repartizate Poisson şi trebuie să fie independente de intervalele imediat următoare, deoarece disciplina de aşteptare este SIEO. în acest caz, timpul total de aşteptare poate fi exprimat ca o sumă de două elemente

$$V = Vj\_ + v_2,$$

unde este multiplu întreg al timpului mediu de servire luat ca unitate de timp şi v_2 este partea fracţionară rămasă. în mod analog, timpul *t* poate fi divizat în şi t_2. Utilizînd independenţele subliniate mai înainte, avem

$$q(t \mid n) = P(v < 11\ n)$$

$$= \mathrm{P}(®_2 < l|n) + P(v_x = t\hat{}n)\ P(v_2 = t_2).$$

şi, ţinînd cont că v_2 este repartizat uniform,

$$2(\text{«i i«}) = \pounds_{i=0}^{n-1} = i\ \mathrm{I}\ n) + v_2\ \mathrm{P}(®_1 = \quad / n).$$

Notînd $= i|n) = Q_t(n),$ obţinem $Q_0(n) = 11n$ şi

$$\&(n) = [1 - \mathrm{Q}_0(n)\mathrm{J}\ \underset{i=o\ J\ !}{\mathrm{S}}\ Qi\text{-}i(n + \mathrm{j} - 1)\ (i = 1, 2,\ldots). \qquad (3.28)$$

Această formulă de recurenţă ne va da g(v|n) şi eventual pe $W_5(v)$, dacă p_n a fost calculat anterior. în acest mod a obţinut Burke graficele la care ne-am referit.

3.5. REGULI DE PRIORITĂŢI PENTRU DISCIPLINA DE AŞTEPTARE

Analizele făcute de Burke, legate de efectele regulii SIRO în cazul modelelor cu un singur şir de aşteptare şi cu timp constant de servire reprezintă un moment prielnic pentru a discuta regulile de prioritate pentru disciplina de aşteptare, cu aceasta încheind capitolul de faţa.

în prezenta carte nu ne vom ocupa în mod detaliat de priorităţi, dar aceasta nu înseamnă că subiectul este de neglijat. în liniile tehnologice ca şi în activităţile legate de întreţinere şi reparaţia utilajelor, stabilirea priorităţilor anumitor componente reprezintă principala cale pentru a asigura eficienţa producţiei şi a minimiza cheltuielile de întreţinere. Aceste aspecte însă nu vor fi discutate în cadrul acestei cărţi. Din această cauză, actuala prezentare va fi redusă la minimum.

3.5.1. PRIORITĂŢI ABSOLUTE

Să presupunem două clase de clienţi şi C_2. Pentru toţi clienţii care intră în sistemul de aşteptare, a aparţin lui C_1 şi restul de (1 — a) lui C_2. Este necesar să considerăm doar două clase de priorităţi, deoarece este foarte uşor să generalizăm rezultatele obţinute pentru două clase şi în cazul priorităţilor pentru mai multe clase. Cînd un client din Cj soseşte, el are prioritate faţă de toţi membrii clasei C_2 care există în sistem, dar se găseşte în urma celorlalţi membri ai clasei C_1 existenţi deja în sistem.

Notăm cu $p_t(n, m)$ probabilitatea, în starea stabilă, ca un client aparţinînd clasei i să fie servit cînd sînt n clienţi din clasa în sistem şi m clienţi din clasa C_2 în sistem. Atunci, ecuaţiile stării stabile vor ii scrise după cum urmează, dacă intensiiatea medie de servire este aceeaşi pentru ambele clase :

$$Pi(l, 0) + p_2(0,1) = p\ p_o(O, 0) = p\hat{}o,$$

a pK_0 + pj(2, 0) + p_2(l, 1) = (p +l^l, 0),

(1 - a) $_PZ_0$ + $_{P1}$*(l,* 0) + p_2(0,2) = (p +l)p_2(0, 1),

ap7h(n - 1, 0) + Pi(n + 1, 0) + *p_2(n,* 1) = (p + l)p_x(n, 0), (1 —<x)pp$_2$(0, *n* - 1) + pj(l, *m)* + p_2(0, *m* + 1) = (p + 1) p_2(0,*m),*

(1 —a)ppj(l, *m,* — 1) + pj(2, *m)* + p_2(l, *m* + 1) = (p + l)p_x(l, *m),*

acpp$_2$(n - 1,1) = (p + l)p_2(n, 1),

$$\text{appjn - 1, m) + (1 - *)}P_{PI}\,(n, m - 1) + p\hat{}n + 1, m) +$$

$$+ p_2(n, m + 1) = (p + 1)\,Pi(n, m),$$

$$(\text{»> 1; } m > 0),$$

$$\text{app}_2(n - 1, m) + (1 - a)\text{pp}_2(n, \text{»>-l}) = (p + w),$$

$$(n > Q\text{-}, m > l). \qquad (3.29)$$

Aceste ecuaţii pot fi rezolvate prin metoda cunoscută a determinării funcţiei generatoare, care în acest caz este în două variabile: în £ alocat pentru *n* şi *s* pentru *m.* Subliniem că, în mod necesar, deoarece intensităţile medii de servire sînt identice pentru Cj şi C_2, avem $K_o = 1 - p$. Mai mult,

$$\sum_{T=0}^{n-1} s\,\{pi(n - r, r)\,p_2(r, n - r)\} = (1 - p)p".$$

Calculele algebrice legate de determinarea funcţiilor generatoare sînt foarte anevoioase şi nu vor fi reproduse aici. Din funcţia generatoare se obţin următoarele rezultate :

$$\frac{1 + p - ap}{1 - ap} \qquad (3.30$$

$$m = (1 - \frac{1 - ap + ap^2}{P(1 - P)(1 - \alpha P_i} \quad (3.31$$

$$n_Q \quad \frac{\alpha\rho^2}{1 - \alpha\rho} \quad (3.32)$$

$$m \quad \frac{(1 \sim \alpha)P^2}{(1 - p)(1 - ap)'} \quad (3.33$$

$$\frac{X}{(\pm(p. - aX)} \quad 9 \quad (3.34$$

$$92 \quad \frac{X}{(g - X)(fi - \quad} \quad (3.35$$

Este interesant de remarcat că raportul timpilor medii de aşteptare pentru cele două clase de clienţi este

fx -X

care este independent de a. Nu este surprinzător să constatăm că atunci cînd intensitatea traficului se apropie de 1, şirul clasei C, va deveni extrem de mare, în timp ce pentru clienţii clasei (\ tinde spre limita stării stabile.

Cox şi Smith analizează în detaliu situaţia în care există *k* clase de priorităţi. Ei arată că în această situaţie :

$$W_{qj} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i C_i}{\left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)},$$

unde a_4 este proporţia clienţilor care aparţin clasei $C_{(}$, este intensitatea medie de servire a acestor clienţi, iar $c_{(}$ este momentul de ordin doi al repartiţiei timpului de servire pentru membrii clasei C_t. De asemenea, ei arată că timpul mediu de aşteptare pentru toţi *k*

clienţii este $W_q = \sum_{i=1} a_j W_{qj}$.

Aceste expresii pot fi folosite în evaluarea sistemelor optime de alocare a priorităţilor. în mod special, dacă întîrzierilor în şir le pot fi repartizate penalităţi astfel încît valorile lor să fie proporţionale cu timpii medii de aşteptare ai diferitelor clase, atunci priorităţile ar putea fi repartizate în concordanţă cu valorile rapoartelor :

timpul mediu de servire

penalitatea pe unitate de timp de aşteptare

Cu cît valoarea raportului este mai mică, cu atît va fi mai mare prioritatea.

Aceasta este tot ce am vrut să prezentăm legat de priorităţile absolute. Cititorul care doreşte să studieze problema mai profund este sfătuit să consulte lucrările citate în cadrul bibliografiei selectate la sfîrşitul acestei cărţi. Recomandăm cu căldură explicaţiile date în cartea lui Cox şi Smith.

3.5.2. PRIORITĂŢI RELATIVE

Această secţiune va începe cu un comentariu personal. Exceptînd electronica şi telecomunicaţiile, nu am întîlnit situaţii în care să fi fost utilizate priorităţile relative sau să fi existat posibilitatea utilizării lor, chiar atunci cînd acest lucru ar fi fost de dorit. Nu cred că priorităţile relative să aibă aplicaţii în procese de aşteptare în care clienţii sînt fiinţe umane. Deoarece personal am avut puţine ocazii în care am întîlnit priorităţi relative, s-ar putea să fie foarte dificil pentru cititor să-şi imagineze situaţii în care pot să apară. O aplicaţie ma joră este legată de utilizarea sistemelor mari de calculatoare electronice digitale care operează on-line. Pentru sistemele on-line nu este deloc neobişnuit să aibă de rezolvat o mare varietate de probleme. Unele dintre ele sînt mai importante decît altele şi sînt repartizate priorităţi relative, astfel îneît dacă o problemă prioritară necesită o prelucrare imediată, o rutină specializată a sistemului de operare memorează programul care era rulat în acel moment, întrerupîndu-1, şi-l încarcă pentru execuţie pe cel cu prioritate mai mare. Această situaţie este foarte utilizată la sistemele electronice on-line, destinate rezervărilor de bilete pentru cursele aeriene. în astfel de cazuri, după ce o problemă cu prioritate înaltă a fost prelucrată, programul întrerupt revine ca şi cum acum prioritatea sa ar fi cea mai înaltă, dar imediat prioritatea sa reintră în nivelul normal.

în cadrul sistemelor cu prioritate relativă clienţii cu maximă prioritate nu sînt afectaţi deloc de cei cu priorităţi mai scăzute. Să presupunem de exemplu că, asemănător secţiunii precedente, există două clase prioritare $C_{\pm}$ şi C_2, în proporţiile a şi 1 — a ale clienţilor. Timpii lor de servire sînt repartizaţi exponenţial, cu parametrii [ij şi ;x_2. Atunci, probabilitatea, în stare stabilă, ca să existe *n* clienţi din C_1 în sistem este

$$Pin = p''(l\ pj),\ n = 0,1,\ 2,\ldots,$$

unde pj = aX/fip Ecuaţiile stării stabile pot fi scrise ca de obicei pentru probabilităţile *p(n, m)* ca să existe *n* clienţi ai clasei prioritare C_1 şi *m* din C_2 în sistem. Funcţia

generatoare poate fi dedusă destul de uşor, iar apoi prin derivare poate fi arătat că numărul mediu al clienţilor din C_2 este

$$\frac{P2\,(_{1+}\,\_Pk\_.}{^{1}\,-\,Pl\text{-}P2\backslash\qquad 1\text{-}P1\;\;p\text{-}1)}$$

De asemenea, este posibil a deduce timpii medii de aşteptare şi timpii medii totali de aşteptare în felul următor :

$$W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} \qquad W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} \left(\rho_1 + \rho_2 + \frac{\rho_1 \mu_2}{1 - \rho_1 \mu_1} \right).$$

3.6. COMENTARIU GENERAL

Există un model foarte general al proceselor cu un şir de aşteptare, cu intrări şi servire generale şi disciplina de aşteptare FIFO, elaborat de W. L. Smith. Este posibil — cu unele eforturi însă — a deduce rezultatele FIFO determinate în cadrul acestui capitol din formulele generale ale lui Smith. Nu există însă asemenea analize pentru modelele cu mai multe şiruri de aşteptare. Cititorul, care este familiarizat cu transformata Laplace şi teoria funcţiilor de variabilă complexă, este călduros sfătuit să citească lucrarea lui Smith, în cazul fericit că ar putea-o procura.

MODELE CU MAI MULTE STAŢII DE SERVIRE

4.1. MODELE

Diferenţa esenţială dintre sistemele cu o staţie de servire şi cele cu mai multe staţii de servire este aceea că ultimele prezintă o mai mare varietate a disciplinelor de aşteptare; trebuie ţinut seama mai mult de posibilitatea unei comportări neobişnuite a unui client.

Nu este deloc uşor de a formula reguli matematice în cazul modelelor cu tipurile cele mai amorfe de disciplină a aşteptării. Pînă în prezent s-au făcut foarte puţine încercări în acest sens. Modelele clasice cu mai multe staţii de servire presupun de obicei regula FIFO şi mai rar regulile LIFO sau SIRO. în orice caz s-a presupus principial că toţi clienţii sosiţi vor forma un singur şir de aşteptare şi că acest şir va alimenta cu clienţi staţiile de servire, după o anumită regulă bine definită de tipul FIFO, LIFO sau SIRO. Posibilitatea dezintegrării — unicul şir să se împartă în mai multe şiruri, poate chiar cite unul pentru fiecare staţie de servire — precum şi fenomenele asociate, ca cel de deplasare, servire preferenţială etc., nu au fost luate în considerare. Chiar şi în aceste situaţii, modelele cu mai multe staţii de servire sînt mult mai greu de analizat din punct de vedere matematic decît cele cu o singură staţie. Din această cauză au fost cercetate foarte puţin şi dispunem de foarte puţine modele utilizabile.

4.1.1. ***M/M/c*** **: (oo/EIFO)**

Acesta este cel mai simplu model cu mai multe staţii de servire şi de aceea îl vom prezenta la început. Se presupune că sosirea clien- ţilor are loc după o repartiţie Poisson, cu o intensitate medie de X pe minut. La sosire, fiecare client are trei opţiuni de comportament:

1. Dacă toate staţiile de servire sînt ocupate, se va duce la unicul şir de la care se alimentează toate staţiile.
2. Dacă o staţie este liberă şi toate celelalte ocupate, se va duce imediat la cea liberă.
3. Dacă există două sau mai multe staţii libere, se va duce la oricare din ele, fără vreo preferinţă.

Pe măsură ce staţiile se eliberează, clientul care a stat cel mai mult în aşteptare se duce de îndată la staţia eliberată; dacă nu există clienţi în aşteptare, evident că staţia va rămîne liberă pînă la o nouă sosire, iar atunci, conform cu regulile descrise, clientul nou sosit va putea alege serviciul acesteia. Nu există posibilitatea ca o staţie să fie liberă dacă sînt clienţi în aşteptare.

Toate staţiile realizează acelaşi fel de servicii. în cadrul fiecărei staţii, repartiţia timpului de servire este exponenţială cu intensitatea *b,* astfel încît intensitatea medie a serviciului este de p. clienţi pe minut.

Ca de obicei, vom nota cu $p_n(t)$ probabilitatea prezenţei an clienţi în sistem la momentul *t.* Cu această notaţie este uşor să deducem ecuaţiile diferenţiale pentru modelul pe care-1 analizăm, urmînd în linii mari raţionamentul utilizat în capitolul precedent pentru modelul Jf/Jf/1 :(oo/FIFO). Acestea sînt;

$$\frac{dZ}{} = - Xp(O, t) + p.p(l, t),$$

$$d\#(n. \quad —= — (x + nji)p(n, t) + Xp(n — 1, t) + dZ$$

$$+ (n + 1)\ u.p(n + 1, t);\ l<n<c—1, \qquad (4.1$$

$$^7^= — (X + C[i)p(n, t) + Xp(n - 1, t) + dZ$$

$$+ cu.p(n + 1, Z),\ c<n.$$

Soluţiile dependente de timp ale acestor ecuaţii pot fi obţinute cu ajutorul transformatei Laplace a funcţiei generatoare — notată cu P*(s, *z)* — şi, ca atare, pot fi deduse momentele repartiţiei numărului

de clienţi existenţi în sistem la momentul *t.* Aceste momente pot fi folosite pentru obţinerea unei repartiţii aproximative. Totuşi, nu este uşor să determinăm aceste soluţii dependente de timp şi, după cum am văzut, aceste soluţii nu prezintă un interes practic deosebit. Prin urmare, vom trece încă o dată la determinarea soluţiei stării stabile, prin eliminarea lui *t* şi egalînd derivatele cu zero. Va rezulta că :

$$- *Po + \hat{}1 = 0;$$

$$- (X + npi)p, + lp_{n\_1} + (» + !)\, np_{n+1} = 0,\ lO<c - 1 ; \qquad (4.2)$$

$$- (X + cp)p_n + Ăp,,.! + ciip_{n+1} = 0,\ c<n.$$

Se poate demonstra, prin inducţie, că probabilităţile stării stabile date de aceste ecuaţii sînt:

$$^{Po} \sim (cpf\ W\ \underline{1}$$

$$,to\ r! \qquad c! \quad 1 - p$$

$$Pi \qquad Poy *<^{c}; \qquad (4.3$$

$$Pi = \frac{c}{—}\ P\ Po,\ i > {}^{c}- c\ 1$$

în aceste formule p = X/(cg), adică traficul măsurat în erlangi împărţit cu numărul staţiilor de servire. Traficul obţinut este uneori notat cu e, iar formulele de mai sus sînt atunci scrise înlocuindu-1 pe p cu e/c. (Excelenta carte a lui Fry utilizează această notaţie.)

Acest model presupune că nu există limitare a clienţilor care pot exista în sistem la orice moment dat; altfel spus,

sistemul are *o capacitate infinită.* Aceasta este o simplificare ce poate fi înlăturată cu uşurinţă, iar modelul rezultat este mai general şi mai folositor.

Să presupunem că prima din cele trei reguli legate de comportamentul clientului este înlocuită de următoarea :

la. Dacă la sosirea unui client toate staţiile de servire sînt ocupate, acesta se va aşeza la unicul şir de aşteptare al tuturor staţiilor dacă numărul clienţilor existenţi în sistem este mai mic decît *L,* iar dacă acest număr este *L,* el nu se va mai aşeza în şir şi va părăsi sistemul.

Vom numi aceasta, *restricţia asupra capacităţii sălii de aşteptare.* Capacitatea maximă a sistemului este *L,* iar capacitatea maximă a sălii de aşteptare este *L — c.* Clienţii care sosesc şi, găsind sistemul supraaglomerat, îl părăsesc, sînt numiţi clienţii respinşi sau, în cazul sistemului telefonic, *convorbiri pierdute.*

Pentru acest model, ecuaţiile stării stabile sînt :

$$— (Ă + \quad + (n + 1) \quad = 0, (l<n<e - 1)$$

$$— (X + c\ ţi)p_{„} + Xp_{„\_!} + Cfip_{n+1} = 0, (c<n<L — 1)$$

$$-Cfxp_L + \qquad = 0, \qquad (4.4$$

$$- \qquad + P\text{-}Pi \qquad = 0.$$

Din nou aceste ecuaţii pot fi uşor rezolvate, rezultînd următoarele probabilităţi:

$$Po = \left[\sum_{r=0}^{r} \frac{(cp)^r}{r!} + \frac{1}{c!}\frac{(cp)^{r}}{c^{r-c}}\right]^{-1},$$

$$Pi = \frac{(cp)^i}{i!}Po, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (4.5$$

$$Pi = \frac{c^c}{c!}p^i Po, \quad i = c+1, c+2, \ldots$$

Trăsătura interesantă a acestui model este că, pentru orice trafic obţinut X/fi, există două posibilităţi de manevrare a probabilităţilor de aşteptare : prin ajustarea capacităţii sistemului sau a numărului de staţii de servire.

ternului poate fi făcută oricît de mare, se obţin încă o dată formulele modelului Erlang Jf/Jf/c: (co/FIFO). Iar dacă luăm $c = 1$, vom obţine

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{L+1}}$$

$$Pt=P^{i}Po\hat{}\ i = l,2,...,L,$$

care reprezintă tocmai probabilităţile stării stabile pentru modelul cu o staţie de servire avînd capacitate limitată. Făcîndu-1 pe L să tindă spre infinit, obţinem probabilităţile pentru modelul Jf/Jf/l :(oo/ /GD). Acestea pot fi comparate cu rezultatele obţinute în capitolul precedent.

Pînă acum nu a fost necesar să utilizăm regula FIFO : „cînd o staţie se eliberează, clientul care a stat cel mai mult în aşteptare se duce de îndată la staţia eliberată". Probabilităţile pe care le-am dedus nu sînt afectate de disciplina de aşteptare şi pot fi aplicate la toate cele trei modele principale *M/M/c* :(Z/FIFO), *M/M/c* : (L/SIRO) şi *JflMfc* :(Z/LIFO). De aceea este limpede că numărul mediu al clienţilor existenţi în sistem nu va fi afectat de disciplina de aşteptare şi atît timp cît repartiţia timpului de servire este exponenţială, cum este în acest caz (aceste consideraţii vor trebui revăzute), timpul mediu total de aşteptare şi timpul mediu de aşteptare de asemenea trebuie să fie independente de disciplina de aşteptare. Dacă este aşa, atunci remarcăm din nou că pentru modelele cu mai multe staţii de servire efectul diferitelor discipline de aşteptare este doar alterarea probabilităţilor timpilor scurţi şi lungi de aşteptare.

Atunci cînd se aplică regula FIFO, repartiţia timpului de servire poate fi obţinută după cum urmează. Probabilitatea ca un client nou sosit să găsească sistemul supraaglomerat şi să fie respins este Probabilitatea ca să găsească cel puţin o staţie de servire liberă şi deci ca timpul său de aşteptare să fie zero este

$$P_L = \sum_{r=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^r}{r!} + P^L(c^c/cl)$$

$$\sum_{r=0}^{c-1} Pr = r \frac{\sum_{r=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^r}{c!}}{\sum_{r=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^r}{r!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1-\rho^{L-c+1}}{1-\rho}}.$$

Probabilitatea ca să găsească toate staţiile ocupate şi *r* clienţi aşteptînd înaintea sa este

$$P_{c+r} = \frac{c^r}{c!} \frac{1}{(cp)^J (cp)^c \frac{1-p^{\wedge}-^{\wedge}1}{1-p}}$$

Ieşirea clienţilor din staţiile ocupate este repartizată Poisson, astfel încît probabilitatea ca *j* clienţi să fie serviţi într-o perioadă *t* este

---

j-

Prin urmare, dacă un client nou sosit găseşte *r* alţi clienţi în aşteptare înaintea sa, probabilitatea ca el să stea în aşteptare mai mult de *t* momente înainte să intre în staţia de servire este dată de

(cţitV

j-

înmulţind cu p_{c+r} pentru a face relaţia necondiţională şi apoi însumînd după r, între 0 şi *L* — c — 1, obţinem probabilitatea ca un client care intră în sistem, dar care are de aşteptat, să stea în aşteptare şi după trecerea unei durate de timp *t.* (Cititorul va observa că suma trebuie să se oprească la valoarea r = Z — c — 1, în caz contrar clientul va fi respins.) Utilizînd notaţiile uzuale, obţinem

$$\frac{, ,}{c!\,1-pL} \sum_{r=0} \frac{(<W\,1}{r!\,J} \tag{4.6}$$

Aceste expresii sînt destul de sofisticate, dar pot fi uşor evaluate în cazuri particulare. în felul acesta, putem calcula două măsuri ale
efectivităţii — sau standarde de serviciu — pentru acest

model şi anume :

1. Probabilitatea ca un client să stea în aşteptare mai mult decît un timp specificat, să spunem T minute, sau Tp timpi medii de servire.

2. Probabilitatea pierderii — sau respingerii — care este probabilitatea ca un client să găsească sistemul supraaglomerat.

Capacitatea sistemului şi numărul staţiilor pot fi manevrate în scopul modificării standardelor acestor două categorii, pentru orice trafic dat. De exemplu, probabilitatea respingerii poate fi redusă prin mărirea capacităţii *L* a sistemului, dar în aceste condiţii timpul mediu de aşteptare şi probabilitatea existenţei unor timpi de aşteptare de lungă durată va creşte. Micşorîndu-1 pe *L,* timpul mediu de aşteptare poate fi redus, dar atunci va creşte riscul respingerii. O creştere a numărului de staţii, în caz că X, p şi *L* sînt fixaţi, va reduce probabilitatea timpilor de lungă durată, cît şi pe cea a respingerii, într-o situaţie concretă s-ar putea să fie mai economic să se mărească capacitatea sălii de aşteptare decît să se introducă staţii suplimentare. De aceea, este important a decide optimul balanţei între numărul de staţii de servire, pe de o parte, şi capacitatea sistemului, pe de altă parte.

Acest model este destul de util în practicile comerciale şi de aceea este necesar a calcula pentru diferite valori ale lui X, p, *L* şi *c* probabilităţile de felul de mai sus, care măsoară standardele de servire. Din păcate însă, este dificil a se realiza grafice utile, datorită numărului mare de factori ce trebuie luaţi în considerare. (La Compania de transporturi aeriene Air Canada am realizat un sistem de programe pentru calculator, menit a realiza toate aceste calcule. Acesta este un mijloc pe care-1 recomandăm cititorului.)

Cînd disciplina de aşteptare este de tip 8IRO, nu sînt necesare calcule speciale pentru a obţine formulele din cazul modelului cu mai multe staţii de servire. Morse a demonstrat că formula lui Riordan pe care am întîlnit-o în capitolul anterior legat de modelul Jf/M/1 : (oo/SIRO) este aplicabilă şi modelului *M/M/c:* (oo/SIRO), făcînd doar modificări minore. Această formulă este

$$POO = 1 - W_q(t) = l(l\_y7/2) \exp\{-/(l-p) (1-/772\} +$$

(4.7) + (1 + V P/2) exp {- f(l- p) (1+/7/2}. unde considerăm pe p ca fiind X/(cjz). în scopul calculării lui p_0, W_q (i) şi W_q pentru astfel de modele, au fost realizate tabele remarcabile, datorate lui R. Wilkinson. Din păcate, nu există asemenea tabele sau grafice pentru *M/M/c :* (Z/SIRO). Se pare că nimeni nu a obţinut formulele pentru acest model.

Repartiţia timpilor de aşteptare în cazul unei reguli LIFO este aceeaşi cu repartiţia perioadei ocupate atunci cînd se aplică regula FIFO. Aceasta nu este însă de mare folos, atît timp cît nimeni nu a putut însă obţine o formulă explicită a repartiţiei perioadei ocupate pentru modelul *M/M/c:* (Z/FIFO) chiar şi pentru cazul *L*= oo. Calculul depinde de soluţiile dependente de timp ale modelului şi acestea se pot obţine numai sub forma transformatelor Laplace ale funcţiilor generatoare sau a transformatelor Laplace ale probabilităţilor dependente de timp. Formulele ce rezultă sînt foarte sofisticate şi dificil de evaluat. în anexa 1 sînt prezentate unele consideraţii privind tratarea matematică a acestor probleme; în practică, prin intermediul simulării, este mult mai uşor şi mai rapid de a studia cazurile particulare, acest lucru avînd şi avantajul că limitările privitoare la capacitatea sistemului pot fi modificate fără dificultate, încap. 6 ne vom ocupa mai pe larg de unele aspecte legate de simulare.

4.1.2. *M/E_k/c :* (co/I-IFO)

în principiu nu prezintă dificultăţi analiza acestui model prin tehnica servirii de tip fază pe care am prezentat-o în capitolul anterior, cel puţin pentru cazul stării stabile. în orice moment considerat, starea modelului de aşteptare poate fi definită de numărul existent al clienţilor, n, plus c

numere i_r care specifică faza particulară în care se află clientul din staţia *r.* Intensitatea servirii fiecărei staţii este ţx, iar a fiecărei faze fcp..

Morse a arătat că deoarece cele *c* staţii de servire sînt identice, nu este nevoie decît să specificăm numărul staţiilor ce au în servire un client în faza *r.* Astfel, probabilitatea unei stări date poate fi scrisă

$$p(n\ ;\ m_{lt}\ m_2,\ m_k),$$

m_r este numărul staţiilor ce au în servire un client în faza *r.* Cititorul va remarca că

$$\_\ f^{n}\ \text{P}^{\text{entru}\ n} < {}^{c}i$$

(c pentru n >c.

Ecuaţiile stării stabile sînt:

$$(\text{l-8omj} > P\ (n\text{-}l\ ;\ \text{m}_{1?}\ \ldots,\quad -\ 1)\ 4\text{-}$$

$$+\ (\text{«h} + P(^{n} + 1;\ m_l + 1,\ m_2,\ m_k) +$$

$$+\ \overset{\text{A'-l}}{\underset{\text{Î=I}}{\text{X}}}\ (\text{1-8}_0\text{m}_\text{r})\ (m_{r+1}+l)k[Lp(n\text{-},\ m_k,\ \ldots,\ m_T\text{—}1,\ \text{m}_{\text{r+1}} + \text{l},\ \ldots,\ \text{w}_{\text{„}}) -$$

$$\text{—}\ (\text{X} + nky.)\ p\{n\ ;\ m_k,\ \ldots,\ m_k) = 0\ (\text{c} > n = \text{S}\ \text{m}_\text{r}),$$

$$(1\ \text{—}\ 8_{0\text{mfc}})\ [\text{Xp(c—1;}\quad ,\ m_k\ \text{—}\ 1) +$$

$$+\ (\text{«h} + 1)\ k[Lp(c + 1;\ \text{«h} +1,\ m_2,\ \ldots,m_k\ \text{—}\ 1)] +$$

(4.8)

fc-i

$$+\ \text{S}\ (^{1}\ \text{—}\ \text{^om}_\text{r})\ (\text{m}_{\text{r+1}}\text{-l})\ ktfp\qquad\qquad \text{— } l,m_{TJrk} +1,\ \ldots,\ m_k) -$$
$$T = 1$$

$$\text{—}(\text{X} + ck|i)p(n\ ;\ m_1,\ \ldots\ m_k) = 0\ (\text{c} = n = \text{S}\ m_r),$$

$$\sim\!> P\ (n\ \text{-}\ 1;\ m_{lf}\ \ldots,\ m_k) +$$

$$+\ (1\ \text{—}\ \text{S}_0\text{m}_4)\ (\text{«ii+ 1})\ ky.d(n + 1;\ m_1 + 1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{k\_l},\ m_k\text{-}l) +$$

fc-1

$$+ \sum_{r=1} \pounds (1 - 8_0 m_r)(m_{r+1} + 1)\, kp.p\,(n \quad m_r - 1,\ m_{r+1} + 1,\ \ldots,\ m_k)$$

$$- (X + cky.)p\,(n ;\ m_v \ldots,\ m_k) = 0 \quad (n > c = S\ M'_r).$$

Morse a rezolvat algebric aceste ecuaţii pentru $c = 2, k = 2$. Analiza este excesiv de laborioasă şi se pare că este practic imposibil de a trata astfel cazuri mai ample. Pentru rezolvarea unui sistem pentru care modelul $M/E\hat{}c$: (oo/FIFO) este cel mai adecvat, este necesar a se aplica unul din următoarele trei procedee :

1. Utilizarea calculatorului electronic pentru a rezolva ecuaţiile stării stabile, pentru cazuri numerice specificate.

2. Simularea procesului (absolut necesară dacă se cer informaţii legate de stările de tranziţie — vezi cap. 6).
3. Utilizarea unui model aproximativ (vezi cap. 8 şi 10).

Nu există tabele sau grafice capabile să furnizeze informaţii legate de timpul total de aşteptare sau de timpul de aşteptare pentru astfel de modele, exceptînd cazuri foarte rare, pentru care $c = 2$ sau c = 3.

4.1.3. *MID/c :* (co/I-Il'O)

Acest model a fost studiat pentru prima dată în 1930 de către Crommelin. Au fost obţinute rezultate doar pentru starea stabilă. Fie p_n probabilitatea existenţei a n clienţi în sistem, aşteptînd sau fiind serviţi, şi fie a_n probabilitatea cumulată :

Putem calcula timpul în multipli ai timpului de servire constant, care el însuşi poate fi considerat ca fiind unitatea de timp. Astfel putem lega numărul clienţilor prezenţi la începutul unui interval de timp de cel al clienţilor de la sfîrşitul intervalului :

$$Po = a_c \text{ e"\}$$

(Faptul că la începutul intervalului de timp sînt mai puţini clienţi decît staţii de servire şi faptul că în intervalul de timp considerat nu înregistrează sosiri implică faptul că la sfîrşitul intervalului nu v fi clienţi pentru servit.)

$$\text{Pi} = c_c \, \text{Xe}^{-z} + \text{p}_{\text{c+]}} \, \text{e}^{-x},$$

$$Pn = \text{«}< \frac{\text{X”}}{ni} \text{ e}^{-z} + p_{c+1} \frac{\text{X”}^{-1}}{(n—1)!} \text{ e}\sim^{x} + \ldots + P\text{«}\sim c \text{ e}\sim^{x}.$$

Cititorul îşi va reaminti folosirea acestor ecuaţii, pentru cazul c = 1, în capitolul precedent. Acestea sînt ecuaţiile de balanţă ale lui Crommelin.

Se poate arăta că funcţia generatoare a probabilităţilor

$p_{„}$, notată P(s), este dată de formula

$$P(s) = - \frac{c— X}{(1\ Sj)\ (1\quad S_2) \bullet \bullet \bullet (1\ {}^{s}c\text{-}1)} \quad \frac{(s\ 1)\ (g\ SjJ. . .\ (s\ \&C\text{-}1)>}{1—s^{c}\ e^{X(1\_"}}, \tag{4.9}$$

în care 1, $s_{1(}$ s_2, • • • > ^{s}c-i sînt cele c zerouri ale expresiei

situate pe cercul unitate din planul complex. Probabilitatea p_n poate fi obţinută prin derivarea succesivă a funcţiei P(s) şi punînd apoi s = 0 :

$$Pn \quad \left[\frac{d^{n}}{ds^{n}}\ P(s)\right]$$

Timpul mediu de aşteptare poate fi dedus calculînd pe P'(l) în maniera obişnuită. Rezultatul obţinut va fi

$$£\ y_{+}\ \underline{X^{2} \sim c\ (1 \sim <0}$$
$$X\ ,=il—\ s_T\ 2X(c—X)$$

(4.1

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i\lambda}\left[\sum_{j=ic}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{j}}{j!} - \frac{c}{\lambda}\sum_{j=ic}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{j}}{j!}\right]$$

Calculul nu se poate realiza prea rapid şi de aceea este preferabilă utilizarea unui grafic ce din fericire există pentru W_q cu l<c<100 şi 0,10< p<0,96, unde p este ca de obicei X/(cp.).

In multe aplicaţii se cere să aflăm probabilitatea P(> *t)* ca timpul de aşteptare să depăşească durata *t.* Aceasta are o expresie foarte complexă şi practic inutilizabilă, exceptînd cazurile în care se utilizează calculatorul electronic. Din fericire, pot fi găsite grafice foarte utile pentru c = 1, 2,3, 4,

5, 8,10, 20 şi pentru p <0,8, care satisfac în mare parte cerinţele practice.

Modelul pe care-1 analizăm, M/D/c : (oo/FIFO) pare a avea importante aplicaţii în telecomunicaţii (Crommelin a fost unul din conducătorii Poştei Centrale Britanice), dar nu am avut niciodată ocazia să-l utilizez în lucrările de cercetare operaţională†††††. De aceea, nu am putut da nici un exemplu practic al acestui model.

4.2. FENOMENE DE DEPLASARE

Modelele cu mai multe şiruri de aşteptare discutate pînă acum presupuneau că staţiile de servire sînt alimentate cu clienţi de la un singur şir de aşteptare. în capitolul anterior am prezentat foarte pe scurt cazul unei singure staţii de servire, alimentate de la mai multe şiruri de aşteptare, fiecare şir corespunzînd unei anumite priorităţi de servire. în mod analog, am putea analiza mai multe şiruri de aşteptare ce alimentează mai multe staţii de servire, conform cu reguli cu priorităţi. Modelele teoretice corespunzătoare acestui tip de sisteme, create pînă în prezent, sînt puţine la număr şi neadecvate, iar problemele legate de astfel de sisteme sînt rezolvate cel mai bine prin tehnicile de simulare (vezi cap. 6). Pînă de curînd s-a realizat foarte puţin din punct de vedere teoretic în legătură cu sistemele cu mai multe staţii de servire, fiecare avînd un şir de aşteptare. Situaţia se schimbă însă pe zi ce trece. Vom considera în cele ce urmează cîteva noutăţi.

Vom presupune că sosirile sînt repartizate Poisson şi că, la sosire, fiecare client poate alege aşezarea sa într-un şir de aşteptare înaintea uneia dintre cele *c* staţii de servire. Este evident că dacă s-ar putea determina regula care să ne spună la ce şir se va aşeza clientul şi dacă, odată aşezat în şir, clientul rămîne acolo, atunci aşa-numitul *sistem cu mai multe staţii de servire* nu este altceva decit mai multe sisteme cu cîte o singură staţie de servire, fără vreo legătură între ele. De exemplu, dacă clienţii sînt număraţi începînd de la un moment dat şi dacă a n-a sosire este

---

††††† **Afirmaţia nu mai este adevărată. Modelul se foloseşte în proiectarea sistemelor de computere.**

alocată unui fir în concordanţă cu regula „clienţii se vor aşeza în şirul numărul *n* (modulo c)”, atunci sistemul va fi format din *c* procese distincte *EJG/1:* (oo/GD), în care nu am definit deocamdată nici repartiţia timpului de servire şi nici disciplina de aşteptare, corespunzătoare fiecărui fir din cele *c* existente.Sisteme cu o staţie de servire de acest fel au fost studiate de mai mulţi autori şi în special de R. R. P. Jackson şi D. Nickols. De acestea însă nu ne vom ocupa în prezenta carte. Vom fi mai interesaţi de situaţiile în care se permite clientului să se mute în voie de la un şir la altul, cu intenţia de a-şi micşora timpul de aşteptare. în cap. 10 vom considera un caz al unui astfel de sistem. Pînă atunci, vom examina pe scurt unele cercetări teoretice recente legate de acest fenomen, numit de *deplasare.* O excelentă sinteză‡‡‡‡ a cercetării acestui fenomen a realizat-o E. Koenigsberg; această sinteză stă la baza prezentei secţiuni. Cititorului care doreşte o analiză mai profundă a acestui subiect îi este recomandată lucrarea lui Koenigsberg.

Strategiile posibile ce se oferă unui client care doreşte să fie servit de la un sistem cu mai multe şiruri de aşteptare sînt foarte numeroase, însă principalele sînt următoarele (c = 2):

1. *Regula hotelierului* sau *principiul firului de aşteptare controlat.* Acesta este un principiu general pe care l-am amintit deja în cadrul acestei cărţi, începînd cu prima pagină a capitolului 2, legat de controlul paşapoartelor la aeroporturi. Clientul procedează în felul următor : dacă ambele staţii sînt ocupate, el va aştepta în singurul şir şi se va deplasa conform regulii FIFO. Dacă ambele staţii sînt libere, el are posibilitatea de a alege oricare, ambele staţii putînd fi alese cu probabilităţi egale.

2. *Regula Krishnamoorthi.* Dacă ambele staţii sînt libere, clientul va alege prima cu probabilitatea p_r şi a doua cu probabilitatea p_2, în rest totul este la fel ca la regula hotelierului.

3. *Regula ghişeelor C,EC :* fiecare staţie de servire are propriul său şir de aşteptare. La sosire clientul se va aşeza la cel mai scurt şir. Dacă ambele şiruri sînt libere, va alege

---

‡‡‡‡ **Koenigsberg. E. *On Jockeying in Queues.* CORS —ORSA Joint Naţional Conference, Montreal, 1964.**

pe oricare dintre ele, cu probabilităţi egale. Odată intrat în şir, clientul va rămîne în el. Vom nota această regulă a disciplinei de aşteptare prin EK—1, ceea ce înseamnă de fapt prima regulă a lui Koenigsberg. Este natural să codificăm această regulă ca şi cele ce urmează, cu iniţialele persoanei care le-a clasificat pentru prima dată.

4. *Regula ghişeelor CEC cu deplasare instantanee* sau EK—2 : este asemănătoare lui EK—1, dar clienţii se pot deplasa de la un şir la unul mai scurt. Deplasarea în acest caz poate fi aleatoare sau instantanee. Deci avem două cazuri EK — 2a şi respectiv EK—2b. Pentru ambele, principiul general al operaţiei este acelaşi ca şi la EK—1, cu o singură modificare. în cazul EK—2 a, clienţii părăsesc şirul mai lung pentru unul mai scurt cu o viteză proporţională cu diferenţa de lungime dintre ele. în EK—2 b, în momentul în care ■diferenţa lungimilor depăşeşte unitatea, ultimul client din şirul mai lung se va deplasa imediat la sfîrşitul celui mai scurt.

5. *Schimbarea cărării* sau EK—3; clienţii nou sosiţi aleg un şir iniţial, dar se deplasează de la şirul mai lung spre cel mai scurt cu o viteză proporţională cu diferenţa de lungime dintre cele două şiruri. Un client particular aflat intr-un şir mai lung poate sau nu să se deplaseze, deoarece ceilalţi pot face deplasarea înaintea lui şi astfel girurile se vor egaliza înainte ca el să se poată mişca. (Cu alte cuvinte, transferurile de la un şir la altul au loc în mod continuu şi nu sînt simultane.)

6. *Schimbarea drumului* sau EK—4 ; clienţii aleg un şir iniţial dar se permite deplasarea în ambele sensuri. Probabilitatea părăsirii unui şir în favoarea altuia este dependentă numai de lungimea lui. Clientul nu are nici un fel de informaţie legată de lungimea şirurilor, ■exceptînd cea a şirului în care se găseşte.

Koenigsberg a examinat toate aceste principii pentru modelul Jf/Jf/2 : (oo/GD), GD fiind de fapt înlocuit de fiecare regulă în parte, în acest fel, el a demonstrat că fenomenul de deplasare contribuie la îmbunătăţirea performanţei sistemului de aşteptare doar dacă se reduce cantitatea de timp liber al staţiilor. Este singurul aspect meritoriu al fenomenului de deplasare.

Nu vom acorda prea multă atenţie aşa-numitei reguli a hotelierului ; cu toate că aceasta este o procedură mai eficientă decît cea asociată regulii ghişeelor CEC sau EK—1.

Formulele pentru *M/Mjc* : (Z/FIFO) pe care le-am dedus anterior demonstrează din plin acest lucru. De exemplu, timpii totali de aşteptare rezultaţi dintr-un sistem *M/M/c* : (oo/FIFO), în care intensitatea sosirilor este X, sînt mai scăzuţi decît cei ale celor *c* sisteme independente de forma At/M/1 : (oo/FIFO) în care pentru fiecare staţie X' = X/c. Principiul lui Krishnamoorthi ar putea fi utilizat, conform părerii autorului său, atunci cînd intensităţile de servire ale staţiilor sînt diferite, iar clientul care soseşte şi găseşte ambele staţii libere se va duce întotdeauna la cea mai rapidă. Aceasta pare a fi o idee interesantă : Krishnamoorthi a demonstrat că aceasta minimizează numărul mediu al clienţilor din sistem; din păcate însă, nu poate fi aplicat în multe situaţii reale, deoarece clientul nu are posibilitatea de a cunoaşte care este staţia cea mai rapidă. în mod ocazional este posibil ca staţiile de servire să îndrume ele însele un client nou sosit la staţia pe care ei o cunosc ca fiind cea mai avantajoasă, iar cînd acest lucru are loc, regula conferă avantajele prezentate. O asemenea situaţie poate fi remarcată în procesele legate de operaţiile industriale, în care staţiile sînt de fapt utilaje cu viteze de lucru diferite. Aceasta a fost situaţia reală într-un caz descris de noi, dintr-un alt punct de vedere, însă, într-o lucrare anterioară.

Faptul cel mai interesant legat de modelul Jf/Jf/2 : (oo/EK—1), în care intensităţile medii de servire ale celor două staţii sînt ^4 şi respectiv p,$_2$, este că lungimile medii ale celor două şiruri de aşteptare sînt aceleaşi şi sînt independente de intensităţile de servire. De aceea, preferinţele clientului nu afectează lungimile medii ale şirurilor atunci cînd ele sînt de forma „alege cel mai scurt şir”. Dar clienţii care se aşază la şirul cu servirea cea mai lentă vor trebui să aştepte în medie mai mult decît ceilalţi. Proporţia clienţilor în fiecare şir este

$$\frac{}{+\ \text{P-a}} \quad (i = 1, 2). \qquad (4.11)$$

Deplasarea probabilistică în cazul sistemului în care se

aplică regula ghişeelor CEC nu serveşte unor scopuri utile. Modelul de aşteptare prezintă aceleaşi caracteristici privind lungimea şirului ca şi cînd fiecare client s-ar aşeza în şirul cel mai scurt şi ar rămîne în el, iar acest rezultat nu este deloc afectat de valorile constantelor de proporţionalitate ce măsoară intensitatea deplasării. Această concluzie apare şi în cazul EK—5, sau al procedurii schimbării cărării. Acestea două sînt proceduri fără utilitate şi ambele determină o anumită pierdere a timpului potenţial de servire, care are ca urmare o scădere a capacităţii de servire. Acest lucru poate fi remarcat prin observaţia că stările *(n^* 0) şi (0, n_2*)* sînt posibile pentru toţi n_r şi n_2, în ambele cazuri, unde n_x şi n_2 sînt numerele clienţilor aflaţi în primul şi respectiv în al doilea şir.

Modelul M/M/2 : (oo/EK—2b) are aceleaşi caracteristici ale lungimii medii a şirului ca şi cunoscutul model Jf/Jf/2 : (00/FIFO); acest lucru este adevărat chiar şi atunci cînd intensităţile medii de servire diferă; altfel spus, rezultatul se menţine pentru intensităţile medii de servire p_x şi [x_2. Rezultatele modelelor Jf/Jf/c : (00/FIFO) cu intensitatea de servire p.(pentru staţia *i* au fost obţinute de Gumbel.

Koenigsberg a limitat studiul său la cazul a două staţii de servire. Atunci cînd există mai multe staţii, să spunem, mai mult de cinci, încep să apară alte efecte ale comportamentului clienţilor. Pentru astfel de cazuri nu prea există modele matematice aplicabile şi aceasta datorită faptului că este dificil a determina exact comportamentul clienţilor. în cap. 10 vom întîlni totuşi un proces de acest tip.

MODELE ALE SISTEMELOR SERIALE ŞI CICLICE

Multe dintre sistemele de aşteptare existente in societate nu sînt formate doar dintr-o singură fază a procesului de servire. Este foarte frecvent cazul sistemelor în care ieşirile unui proces de aşteptare reprezintă intrările altuia. Acest lucru este ilustrat în fig. 5.1.

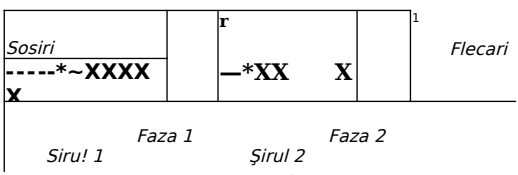


Fig. 5.1. Ilustrarea unui sistem serial în două faze.

Acestea sînt cunoscute sub denumire de sisteme seriale de aşteptare sau sisteme cu staţii de servire în serie. Cînd capetele se înlănţuie şi formează o buclă, astfel încît clienţii se vor roti în sistem, sistemu se va numi sistem de aşteptare ciclic.

în cadrul acestui capitol vom analiza sumar modele ale acestoi două tipuri speciale de sisteme de aşteptare. Faptul că expunerea este scurtă nu se datoreşte deloc importanţei sistemelor seriale şi ciclice ci doar lipsei unor teorii bine fundamentate legate de aceste sisteme şi rarităţii exemplelor de aplicabilitate în literatura cercetării opera

ţionale.

5.1. SISTEME SERIALE

Singurul model al sistemelor seriale care a fost analizat de către matematicieni este acela care conţine un sistem : (oo/FIFO) ce alimentează un alt sistem *M/M/c₂:* (oo/FIFO). J. R. Jackson a împins cercetarea acestui tip de model la limita sa extremă, rezol- vîndu-1 pentru cazul general care presupune existenţa a fc faze distincte. Mulţi alţi cercetători au studiat cazuri particulare, ca de exemplu pentru q = 1 sau c_2 = 1 etc. Deoarece analiza lui Jackson nu elucidează doar cazul general, ci determină şi formule realmente utilizabile, ni se pare natural să începem prin a-1 prezenta. Presupunem că există *k* faze de servire, cu şiruri nelimitate admise înaintea fiecărei faze, iar sosirile le considerăm aleatoare, cu intensitatea X pentru prima fază. Faza *r* conţine c_r staţii de servire, toate avînd repartiţia timpului de servire exponenţială cu media 1/g. Aceasta implică [v. cap. 4, modelul *MIM/c*: (L/FIFO)] că dacă în faza *r* sînt n_r clienţi, atunci probabilitatea unei plecări într-o perioadă di este

$$n_r \text{ p,}_r\text{di} + \text{o(d/)}, \qquad n_r < c_r,$$

$$c_r \text{ p.}_r \text{ di 4-o(di)}, \qquad n_r > c_r.$$

Jackson a dedus soluţia stării stabile a acestui model. Sarcina determinării soluţiilor dependente de timp este considerabilă (şi, din punct de vedere practic, neesenţială). Ecuaţiile stării stabile, conform notaţiilor lui Jackson, sînt următoarele :

$$\hat{A} + £\ \hat{a}\ (n_r)\ a(n_r)\ \text{gj p}(n_n\ n_2, \ldots, n_k) =$$

$$= £ \overset{k}{8}(n_r + 1)\ a(n_r + 1)\ y._r\ p(n_{lf} .. n_r + 1, n_{r+1} - 1, \ldots, n_k) + r=l$$

$$+ \text{Ap}\ («\text{i-l}, «2, «3, \bullet\ \bullet\ \bullet, n_k)\text{-} \qquad (5.1)$$

Trebuie subînţeles faptul că dacă un argument de forma n_{r+1} — 1, de exemplu, devine negativ, atunci probabilitatea corespunzătoare poate fi ignorată, fiind nulă. Mai mult,

termenul cu —1 şi acela cu 4-1 pot fi neglijaţi în termenul final al ultimei sume.

Simbolurile speciale folosite au următoarele semnificaţii:

$a(n_r)$ = |"

$8(n_r)$ = P'
lo,

8 K_{+1}) = 1.

Aceste ecuaţii sînt destul de dificil de interpretat şi de aceea, înainte de a trece la prezentarea soluţiei lui Jackson, cititorului îi este recomandat să urmărească aceste ecuaţii pentru $k = 2$ faze. Ele iau forma :

Xp(0, 0) = |X_2P(O, 1);

(X-|-p.$_x$) p(l, 0) = Xp(0, 0) + |X_2P(1, 1);

(X + H2) p(0, 1) = 0) 2p.$_2$ p(0, 2);

(X 4- Hi + 1) = W, 1) + HIP(2, 0) + 2[x_2p(l, 2);

(5-2)

(X+c_1[i.$_1$+$n_2$ti.$_2$)p(n_1, n_a)=Xp(n_x—1, n_2)4-c_x p.$_x$p(n_x4-l, «$_2$-l)+

+($n_2$4-l)}x_2î>(n_1, n_2+l)

(X 4- n_x[i_x 4- ^a) *P(*u* wa) = **P(*j.* ~ 1, ^2) +

4- (n_x 4-1) 4-1, n_2 - 1) +

4" *CiPaPfol,* W24"l) w2^c2) ;

(X4-$c_x n_x$ 4- C2H2) *P(ⁿi, = *P(ⁿi — ʷ2) 4- C1H1 P(ⁿi + 1, ⁿ2— 1) 4-

4-c_2[i_2p(n_x,$n_2$4-l) (n>c_x; «$_2$>c_2).

Aceste ecuaţii sînt într-adevăr destul de dificile. Totuşi soluţiile pentru n_2) sînt relativ simple. Să ne întoarcem însă la modelul
general al lui Jackson, cu k faze. Soluţia este

$$p(n_Y, n_z, n_k) = \text{p}(0, 0, \ldots, 0) \text{ JJ } \overset{k}{b}(n_r), \qquad (5.3$$
r-1

în care

$$b(n_r) =$$

Cititorul care va face o comparaţie cu capitolul anterior va găsi aceste expresii asemănătoare cu soluţiile lui p_n pentru modelul Jf/Jf/c: (oo/FIFO).

Termenul $p(Q,$ 0, ..., 0) se determină prin însumare, după $n,$ deoarece suma tuturor termenilor este egală cu 1. Deci

$$\overset{\text{ao x}}{\text{S}} \text{ I-I} \quad {}^{\text{oo}} \qquad nk =$$
$$\text{M}_1 = 0 \; n.\pounds = 0 \qquad (5.4)$$

$$\text{-n[£ 5(\%)l=n^ 0 = 1,2,\ldots,*).}$$
$$\text{r=lLi = O} \qquad \text{J j = I}$$

Din nou, o vizualizare a formei acestei soluţii pentru k = 2 ar putea fi utilă. De exemplu, pentru şi $n_2 < c_2$, putem scrie

$$p(n_1, n_2) = \tag{5.5}$$

$$= \frac{\frac{1}{n_1!}(c_1 \rho_1)^{n_1}}{\sum_{r=1}^{c_1-1} \frac{(c_1 \rho_1)^r}{r!} + \frac{c_1^{c_1}}{c_1!} \cdot \frac{1}{1-\rho_1}} \cdot \frac{\frac{1}{n_2!}(c_2 \rho_2)^{n_2}}{\sum_{s=0}^{c_2-1} \frac{(c_2 \rho_2)^s}{s!} + \frac{c_2^{c_2}}{c_2!} \cdot \frac{1}{1-}} \cdot$$

Formele pentru celelalte combinaţii ale lui *n* în funcţie de *c* sînt analoage. Evident că numitorul este egal cu [p (0, 0)]$^{-1}$.

Soluţia obţinută poate fi scrisă de asemenea şi sub forma

$$p\,(\text{«i}, n_2) = p^{(1>}\,(n^{\wedge} \bullet p^{(2>}\,(n_2), \tag{5.6}$$

în care $p^{(i)}(n>)$ pentru j = 1 sau 2 sînt soluţiile corespunzătoare pentru cele două modele de aşteptare A/'(X)/Af(p_a)/c_1 : (oo/GD) şi respectiv Jf(X)/Jf(p.$_2$)/c_2: (oo/GD), după cum se constată imediat (vezi capitolul anterior), adică soluţia găsită cu mulţi ani în urmă de către Karl Erlang pentru modelele cu o singură fază.

Ca implicaţie a acestei situaţii, ieşirile primei faze trebuie să fie Poisson cu media X. Astfel spus, trebuie să fie, din punct de vedere statistic, de aceeaşi formă ca şi intrările. Acest lucru va permite cu siguranţă celor două faze să se comporte ca două şiruri independente. De fapt, ieşirile modelului *M/M/c* : (oo/GD) sînt aleatoare, mai precis Poisson, cu aceeaşi medie ca şi intrările. Există o demonstraţie foarte riguroasă a acestei informaţii într-un articol al lui Burke, pe care însă nu o vom prezenta aici. Este absolut necesar a sublinia utilitatea practică a acestui fapt: dacă nu ar fi fost adevărat, atunci multe sisteme de aşteptare care pot fi studiate (cel puţin la un nivel rezonabil de aproximare) cu ajutorul modelelor independente ale sistemelor mai simple ar fi, din punct de vedere matematic, de nerezolvat . Simularea pe calculatorul electronic ar deveni în acest caz absolut necesară. Cititorul poate observa că se pot petrece lucruri foarte stranii în cazul în care capacitatea şirului primei faze a unui model serial, să zicem cu două faze, este limitată; de exemplu, dacă prima fază este reprezentată de modelul *M/JUI^* : (Z/GD). De fapt, o anumită proporţie a traficului primei faze, cu o intensitate

de X(Ci(ii) este înlăturată, datorită sosirii unor clienţi atunci cînd capacitatea sistemului, *L,* este completată. De aceea, traficul care trece prin a doua fază este oarecum diminuat. Problema care se pune este următoarea : care este repartiţia intervalelor dintre plecările succesive care constituie ieşirile filtrate de la prima fază?

Ca şi în multe alte cazuri, răspunsul la această întrebare poate fi dat prin intermediul următorului exemplu forarte simplu. Să considerăm modelul Jf/Jf/1 : (1/GD) — disciplina de aşteptare este de fapt nesemnificativă pentru această situaţie — în care sosirile au loc cu o intensitate medie X iar timpul mediu de servire este 1/p.j. Este limpede că atunci cînd un client este în curs de servire, toate celelalte sosiri sînt respinse. Prin urmare, intervalele dintre plecările consecutive din sistem, aşa-numiţii *timpi dintre plecări,* sînt fiecare suma a cîte două componente:

t_x — timpul scurs între o plecare din sistem şi o nouă sosire în sistem;

i_2 — timpul necesar servirii noului sosit.

Deoarece repartiţia timpilor dintre sosiri este exponenţială, t_v prima din aceste componente, este total independentă de momentul în sare clientul anterior — care poate a fost respins — a sosit, ca şi de momentul celei mai recente plecări. (Reamintiţi-vă „uitarea" caracteristică repartiţiei exponenţiale, menţionată în cap. 2.) Prin urmare, din punct de vedere statistic, prima componentă are aceeaşi repatriţie cu cea a timpilor dintre sosiri, adică este exponenţială cu media 1/X. A doua, prin definiţie, este de asemenea repartizată exponenţial.

Ca urmare, timpii dintre plecările din sistem sînt repartizaţi ca suma a două variabile exponenţiale, astfel încît repartiţia lor nu poate fi exponenţială. Acest raţionament referitor la faptul că ieşirile din- tr-un proces Jf/Jf/1: (1/GD) nu sînt Poisson a fost făcută de către P. G. Finch, care a demonstrat că :

1. Intervalele dintre plecări sînt repartizate exponenţial *doar atunci* cînd capacitatea sistemului este infinită sau, utilizînd notaţiile noastre , $L = oo$.
2. Mai general, o capacitate infinită a sistemului *(*$L = oo$) şi o repartiţie exponenţială a timpilor deservire sînt condiţii

necesare şi suficiente pentru ca intervalele dintre plecări să fie independente.

De aceea, dacă aşteptarea din prima fază a unui proces format din două faze este limitată, atunci cele două faze nu sînt independente, chiar dacă între faze este permisă o aşteptare nelimitată (acest rezultat se menţine şi în cazul existenţei mai multor şiruri paralele, pentru fiecare fază). Intrările în cea dea doua fază nu sînt repartizate Poisson.

în discuţia ce urmează, despre fenomenul de blocare, vom arăta că cele două faze nu sînt independente dacă reciproca este adevărată ; adică, în caz că avem o capacitate infinită a sistemului în prima fază şi o capacitate limitată pentru aşteptarea dintre faze. Este important să subliniem că restricţiile făcute capacităţii sistemului sau, altfel spus, a spaţiului de aşteptare la orice fază a unui sistem serial multiplu, determină dependenţa fazelor. în practică însă, de obicei se acceptă ipoteza că fazele unui sistem, să spunem, bifazic, sînt independente, în cazul în care este admisă o capacitate suficient de mare înaintea fiecărei faze; o metodă practică de a decide ce înseamnă o capacitate suficient de mare este aceea de a calcula probabilitatea de refuzare a unei sosiri. O probabilitate mai mică decît 0,10 înseamnă practic capacitate suficientă. Cu cît este mai mică probabilitatea refuzului unei sosiri, cu atît încrederea în independenţa fazelor este mai mare. (în cap. 15 vom face referiri mai largi legate de aceste aspecte.)

Să ne întoarcem la sistemul de aşteptare Jf/Jf/1 : (1/GD). Ar fi util să ni-1 închipuim ca fiind prima fază a unui sistem bifazic, în care faza a doua este formată dintr-o staţie exponenţială cu timpul mediu de servire 1/(A_2, cu o capacitate infinită, şi să ne imaginăm condiţiile pentru care şi acest sistem simplu poate fi considerat ca fiind format din două faze independente. Există două cazuri speciale de acest fel, ambele extreme. Primul corespunde unei intensităţi a traficului p = X/(x_x foarte scăzute pentru prima fază şi uneia moderat de mare pentru a doua. Deci nu are loc aproape nici o respingere a vreunui client în prima fază şi, cum nici unul nu va fi nevoit să aştepte, repartiţia timpului dintre plecări din prima fază este identică, din punct de vedere statistic, cu repartiţia timpului dintre sosiri.

Efectul primei faze de servire este acela de a determina timpi exponenţiali de sosire şi nu de a modifica repartiţia timpilor dintre sosiri. în acest caz, faza secundă poate fi tratată ca un sistem lf/Jf/1 : (oo/GD). Astfel de situaţii, de obicei, au mai multe staţii paralele pentru fiecare fază, pot fi uneori întîlnite cînd prima fază este o operaţie de servire de genul „agentului de circulaţie". Exemple de acest gen apar în telecomunicaţii şi în restaurante.

Al doilea caz special corespunde suprasaturării primei faze, adică cazului în care intensitatea traficului depăşeşte unitatea. în ciuda proporţiei ridicate a respingerilor, prima fază este aproape permanent ocupată, astfel încît repartiţia intervalelor dintre plecări este, din punct de vedere statistic, aproape identică cu repartiţia timpului de servire. Dacă aceasta din urmă este, aşa cum presupunem, exponenţială, înseamnă că faza a doua are intrările Poisson, şi poate fi considerată independentă de prima. Asemenea situaţii pot fi remarcate în unele birouri de la companiile aeriene, în care apelurile telefonice au o frecvenţă maximă pentru perioadele în care vremea este foarte nefavorabilă.

Un alt aspect interesant al proceselor seriale este fenomenul de *blocare.* Acesta are loc doar atunci cînd se admite un şir de aşteptare limitat în faza a doua, iar clienţii nu pot părăsi prima fază fără a trece prin a doua.

De obicei, lucrările despre teoria aşteptării acceptă restricţia prin care nu este admis nici un şir de aşteptare în faza a doua, dar această simplificare, cu toate avantajele ce le prezintă pentru calcule, nu este necesară. De exemplu, să presupunem, că fiecare fază este formată dintr-un şir individual de aşteptare şi a doua fază poate cuprinde doar L_2 clienţi; în momentul cînd faza a doua este completată, iar un client a fost servit în prima fază, prima fază este blocată. în aceste condiţii, valorile date, lui L_2 apar fără însemnătate. Dar cu cît L_2 este mai mare, cu atît probabilitatea ca blocarea să se producă este mai mică. Uneori se presupune capacitatea primei faze L_1 ca fiind egală cu 1, astfel încît dacă un client soseşte şi o găseşte ocupată, acesta să fie respins. Această presupunere poate fi însă extinsă şi pentru alte valori ale lui L_r Totuşi, cu cît L_x este mai mare, cu atît

respingerile vor fi mai puţine.

Pentru exemplificare, vom analiza cazul convenţional a două faze exponenţiale, de capacitate infinită în prima fază şi 1 în a doua. Clientul care doreşte să părăsească prima fază pentru a intra într-a doua, în momentul cînd staţia corespunzătoare fazei secunde este completă, va trebui să rămînă blocat în prima fază.

Vom defini următoarele probabilităţi ale stării stabile :

p(n, 0) — există *n* clienţi în prima fază, unul care este servit şi *n—1* aşteptînd; nimeni nu se găseşte în faza a doua;

p(n, 1) — *n* clienţi în prima fază, unul care este servit şi *n* — 1 aşt eptînd ; faza a doua completă;

$p_b(n, 1)$ — *n* clienţi în prima fază, unul care a fost servit şi blochează staţia de servire, în timp *ce n* — 1 clienţi aşteaptă.

Vom presupune că $p_b(n,$ 1) se schimbă instantaneu în *p(n* — 1,1) în momentul eliberării fazei secunde. Ecuaţiile stării stabile sînt:

$$\text{Xp (0, 0) = (i}_2\text{p(0,1);}$$

$$\text{(X + } V\text{^)}P\text{ (0,1) = P-1P(1, 0) + (XjPfiCl, 1);}$$

$$\text{(X + n}_2\text{) Ps(l, 1) = |X1 p(l, 1);}$$

$$\text{(x + } y\text{-i)}p(n,\ 0) = |p(n - 1,\ 0) + \text{p.}_2\text{p(n, 1); n>0;}$$

(5.10)

$$\text{(X+p.}_1\text{ + (i2)î'(»> 1) = Xp(n — 1,0) + p.!p(n + 1, 0) +}$$

$$+\ y._2 p_b(n + 1,1);\ n > 0;$$

$$\text{(X+^Lg) } p_b(n,\ 1) = \text{Xp}_6\text{(n—1,1) + } p.!P(n,\ 1);\ n > 1.$$

Aceste ecuaţii pot fi rezolvate în maniera cunoscută, calculul algebric fiind însă destul de anevoios. Elementul de interes este acela că blocarea ce apare reduce intensitatea de servire efectivă a primei faze sub valoarea ; de aceea, volumul maxim de trafic ce poate fi păstrat în echilibru statistic este mai mic decît Z/IXJ. A fost demonstrat că pentru exemplul dat, acest volum este

$$\text{P.ClX, + IX,) .} \qquad \text{(5 U)}$$

în cazul particular, cînd p.$_1$= p,$_2$, s™ ax devine egal cu 2/3. Este fără îndoială o valoare mai mică decît 1 — *rj,* unde TJ este o cantitate pozitivă, valoare ce rezultă dintr-o stare stabilă în care nu apare blocarea.

Aceasta indică faptul că surplusul de capacitate dintre două faze a sistemului de aşteptare va permite o utilizare superioară a primei faze. Se poate arăta că un surplus de capacitate de numai o unitate măreşte pe E“$^{;X}$ la valoarea 3/4.

Modelele seriale nu pot fi uşor analizate, exceptînd cazul în care repartiţiile timpilor de servire sînt exponenţiale. Motivul este că dacă aceste repartiţii nu sînt exponenţiale, atunci intervalele dintre plecările consecutive din oricare fază nu sînt independente. De obicei însă, ele nu sînt exponenţiale. Cele două exemple pe care le-am examinat şi în care şirul de aşteptare a fost limitat fie în prima fază, fie în a doua (cu rezultate diferite), arată că problema se complică foarte mult în astfel de situaţii. Se pare că tehnicile de simulare constituie singura cale de determinare a proprietăţilor unui model de sistem de aşteptare, serial de orice grad de complexitate ar fi.

Este posibil a se realiza unele succese în multe aplicaţii practice făcînd presupunerea că faza a doua a unui sistem, să zicem bifazic, este independentă de prima. Dacă prima acţionează ca un filtru din cauza unei capacităţi limitate, va trebui corectată intensitatea medie a intrărilor în faza a doua.

5.2. SISTEME CICLICE

Cu toate că existau de mulţi ani analize legate de sistemele ciclice de aşteptare — cum ar fi analiza făcută de Jackson şi Taylor — principala contribuţie teoretică a fost adusă de către E. Koenigsberg.

Vom încheia acest capitol printr-o succintă prezentare a modelului lui Koenigsberg*.

Modelul este format din fc staţii individuale, legate între ele astfel încît formează un circuit închis, ieşirile ultimei faze constituind intrările primei. Toate staţiile prezintă o repartiţie exponenţială a timpilor de servire, iar intensitatea medie de servire pentru faza i este [!<. Există N clienţi în circuit şi acest număr nu poate fi nici mărit şi nici micşorat (prin eventuale plecări). Probabilitatea ca în sistem să existe n_t clienţi în faza i (incluzîndu-1, ca de obicei, şi pe cel care este servit), unde $i = 1, 2, ..., k,$ este notată în echilibru statistic cu $p(n_v n_2, ..., n_k).$

Ecuaţiile stării stabile sînt

$$|x_{(} 3 (n_{(}) \cdot p (n_n n_2, ..., n_k) = y._k p (n_{\pm} - 1, n_2, ..., n_k + 1)$$

$$+ X \overset{fc-1}{P}\text{-i } P ('h, \cdot \cdot \cdot, n_t + 1, n_{i+1} - 1, ..., n_k),$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N ; \quad \delta (n_i) = \begin{cases} 1, & n_i \neq 0 \\ 0, & n_i = 0 \end{cases}$$

unde

şi unde oricare probabilitate $p(n_{If} n_2, ..., n_k)$ cu cel puţin un argument negativ va fi considerată egală cu zero. (5.12) (Comparaţi notaţia lui Jackson cu aceasta.) Koenigsberg a demonstrat că soluţia acestor ecuaţii este

$$n_k) \qquad \sum_{\pi} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \qquad (5.13$$

unde Xj = 1/|L;$_k$ şi este suma după toate valorile întregi care

satisfac relaţia $r_t = N$.
unde este cu r<=0. în cazul în care toate staţiile au aceleaşi repartiţii ale timpului de servire, probabilitatea ca faza *i* să fie liberă este

$$p_i^{(0)} = \frac{\text{numărul diferitelor combinaţii } \{r_t, \ldots, r_n\} \text{ ce au suma } N}{\text{numărul diferitelor combinaţii } \{r_1, \ldots, r_k\} \text{ ce au suma } N}$$

Koenigsberg a arătat că această expresie este egală cu

(5.14)

Formulele nu sînt foarte uşor de utilizat dacă numărul fazelor este mare şi dacă timpii medii de servire sînt toţi diferiţi în cele *k* faze. Din păcate, în realitate există multe situaţii ce se aseamănă proceselor ciclice de aşteptare. în momentul scrierii acestei cărţi, un set de tabele cu probabilităţi ale proceselor ciclice se realizează de P. J. Sandiford tabele care vor simplifica fără îndoială mult aplicarea lor.

$1 = 1$

Se vede imediat că utilizarea staţiei *i*

$$U_i = 1 - p_i^{(0)} = 1 - \frac{\sum_{\pi i} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_k^{r_k}}{\sum_{\pi} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_k^{r_k}}$$

Kcenigsberg, E. *Cyclic Queues.* Operat. Res. Quart., 9,

TEHNICI DE SIMULARE

6.1. METODE MONTE CAELO

Problema ce urmează este studiată în mod curent în statistică. Sînt date două variabile aleatoare *x* şi *y* avînd densităţile de repartiţie *f(x),* respectiv *g(y),* pe intervalele 0 *x* oo şi respectiv 0 < *y* oo. Se cere să obţinem densitatea de repartiţie A(w), cu *u = x + y*- Obţinerea acestei densităţi de repartiţie se face prin intermediul transformatelor Laplace :

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f\{x)\, dx,$$

$$g^*(z) = \int_0^\infty e^{-zu} g(y)\, dy,$$

$$\&^*(\«) = f^*(z) g^*(z).$$

Astfel *h*(z)* este transformata Laplace a lui *Ji{u)* şi în mod teoretic poate fi inversată pentru a da rezultatul dorit.

Din păcate însă, este foarte dificil sau uneori chiar imposibil să inversăm pe *h*(z)* pentru a obţine *h(u)* în termenii unor funcţii cunoscute, pentru care există tabele; de aceea această procedură nu ne poate ajuta decît rareori. Evident este posibil să deducem momentele repartiţiei lui *u,* direct din *h*(z),* deoarece coeficientul lui (1 — *z)*^{r} *(z'/r!)* în seria Taylor-MacLaurin pentru *h* (\«)* este momentul *m'*$_r$ în vecinătatea originii (moment centrat). Funcţia de repartiţie a lui *u* poate fi aproximată prin egalarea momentelor ei *m*$_r$ în jurul mediei, cu cele ale unor repartiţii cunoscute, cum este

de exemplu una din familia repartiţiilor Pearson.

Totuşi, această procedură nu poate fi întotdeauna acceptată, iar statisticienii au imaginat metodele de determinare a lui A(u), prin metode de sondaje probabilistice sau aşa-numitele *tehnici Monte Carto.* Aplicarea unor astfel de metode va fi ilustrată prin intermediul unui exemplu.

Să presupunem că un avion trebuie să decoleze din Toronto la ora 09.00. Experienţa anterioară ne spune că decolările la Toronto
întârzie după cum urmează :

întirzieri la decolare in minute	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Procentul zborurilor întirziate	**60**	**15**	**10**	**7**	**5**	**3**

Mai mult decît atît, experienţa unor zboruri similare a arătat că durata zborului de la Toronto la Montreal variază de la zbor la zbor astfel :

Durata zborului in minute	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**
Procentul zborurilor avînd această durată	**10**	**20**	**30**	**20**	**10**	**6**	**4**

Dacă s-ar programa sosirea avionului la ora 10.00, cîte avioane (în procente) vor sosi mai tîrziu ?
Utilizînd tehnicile Monte Carlo, putem începe prin a repartiza cele 100 de numere 00, 01, 02, ..., 99, întîrzierilor de la decolare şi duratelor zborurilor în concordanţă cu frecvenţele lor, în felul
următor :

Jntirzierea la decolare în minute	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Numere repartizate acestei întîrzien	**00 — 59**	**60-74**	**75-84**	**85-91**	**92-96**	**97-99**

Durata zborului în minute	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

Numere repartizate	**00—09 10 — 29 30 — 59 60 — 79 80 — 89 90 — 95 96 — 99**

Să ne uităm intr-un tabel de numere aleatoare, de exemplu în cel prezentat în cartea lui Fischer şi Yates. Să luăm primele două, care sînt 03 şi 97. Raportîndu-ne la tabelul întârzierilor la decolare, numărul 03 corespunde unei întîrzieri de 0 minute; iar în tabelul duratelor zborurilor, 97 corespunde unei durate de 64 de minute. în acest caz, ora de sosire va fi 9,00 + 0,64 = 10,04.

Repetînd această procedură de 100 de ori, vom determina numărul zborurilor întârziate. Acest număr este 59. Prin urmare, metoda Monte Carlo, bazată pe simularea a 100 de zboruri, estimează la 59 % numărul zborurilor întârziate. Cele 100 de perechi de numere aleatoare alese determină parţial răspunsul la problema pusă. Dar ce s-ar întîmpla dacă am alege alte 100 perechi de numere aleatoare şi am repeta simularea cu ele? Un al doilea experiment Monte Carlo, bazat pe alte 100 de perechi de numere aleatoare arată că 56 % din zboruri vor întârzia. Există, aşadar, două estimaţii: 59 % şi 56%. Care din ele este corectă? Nici una, deoarece ambele estimează o aceeaşi problemă, al cărui răspuns nu este cunoscut. O esti- maţie Monte Carlo bazată pe simularea a 200 de zboruri este mai corectă decît cea bazată pe 100. Cea mai bună estimare a noastră este că

$$1 (59 + 56) = 57,5\%$$

din zboruri vor întârzia.

De fapt, această problemă poate fi rezolvată riguros prin metode statistice obişnuite. Răspunsul corect este că 58,5 % din zboruri vor întârzia. Remarcăm că utilizînd metoda Monte Carlo nu vom obţine valoarea reală şi că., utilizînd experimente repetate, va trebui să determinăm şi dispersia valorii determinate. Dacă însă am utiliza metoda transformatei Laplace, în aparenţă aceste operaţii nu ar mai fi necesare. Cu toate acestea ele sînt necesare, deoarece în situaţiile reale sîntem puşi în faţa unor probleme de determinare a dispersiei estimatorilor noştri pentru parametrii lui/(a?) *şig(y),* în mod necesar tot prin operaţii de sondaj în lumea reală.

Despre tehnicile ce folosesc selecţii aleatoare se pot spune mult mai multe, iar cititorului care doreşte să intre în detaliile acestor probleme îi recomandăm a studia una din cărţile de simulare. Pentru scopul acestei cărţi este suficient a observa că tehnicile de simulare oferă posibilitatea studierii modelelor sistemelor de aşteptare ce nu pot fi tratate analitic. în general o soluţie analitică, datorită generali- taţii ei, este preferabilă unei simulări ce este limitată doar la un caz particular şi este valabilă doar la un moment dat, dar fără îndoială că o soluţie determinată pe baza tehnicilor de simulare este mai bună decit nimic.

Realizarea simulării cu mijloace manuale este de foarte lungă durată. Fiecare iteraţie, sau experiment, este în sine o operaţie laborioasă, iar pentru a estima dispersia sînt necesare mai multe iteraţii. Ca urmare, este normal ca simularea să fie programată pe calculatorul electronic. Pentru a realiza acest lucru este necesar :

1. Un mijloc adecvat de generare a numerelor aleatoare.
2. **O** anumită modalitate de a produce valori avînd repartiţia specificată.
3. Tehnici eficiente de programare.

în cadrul acestui capitol nu este posibil să discutăm aceste probleme în profunzime, dar fiecare dintre ele va fi analizată succint.

6.2. NUMERE ALEATOARE ŞI PSEUDOALEATOARE

Numerele aleatoare utilizate în procesele de simulare trebuie să fie generate la momentul oportun, deoarece în memoria internă a calculatoarelor nu poate fi memorat un număr suficient de mare de astfel de numere antecalculate. Acesta este motivul pentru care tabelele de numere aleatoare nu prea mai sînt utilizate. Este posibil de a produce numere aproape aleatoare (pseudoaleatoare) prin intermediul dispozitivelor electronice, dar acest procedeu nu este un procedeu uzual. în cercetarea practică a proceselor de aşteptare, prin intermediul modelelor, de obicei ne

interesează să comparăm efectele schimbării numărului staţiilor, sau a diferitelor reguli de prioritate. Dacă în simulările făcute am utiliza numere aleatoare veritabile, aceste comparaţii vor da rezultate confuze pentru diferitele secvenţe de numere aleatoare utilizate. Ar fi mult de cîştigat, dacă am putea genera o secvenţă particulară după voie. O astfel de secvenţă nu poate fi, prin definiţie, formată din numere aleatoare, dar poate fi aproximativ (suficient de) aleatoare. Asemenea secvenţe se numesc *şiruri de numere pseudoaleatoare.* S-a demonstrat că numerele pseudo-aleatoare generate de reguli deterministe (cum dealtfel sînt toate) trebuie să fie ciclice. Un obiectiv important al simulării este de a

asigura cicluri adecvate suficient de lungi. Există mai multe metode de generare a secvenţelor pseudoaleatoare. O procedură foarte frecvent utilizată, ce poate genera secvenţe cu cicluri lungi, este procedeul multiplicativ congruenţial, sugerat pentru prima dată de către Lehmer în 1949 şi analizat în detaliu de Moshman în 1954.

Secvenţa de numere întregi generată de formule de recurenţă a?„+i = p^n(mod *q),* în care aceste un număr aleator iniţial, constituie începutul procesului de simulare. Factorul *p* este ales astfel încît maximizează lungimea ciclului. în multe situaţii, numărul *q* este ales ca fiind cel mai mare întreg pozitiv reprezentabil în calculator, dar dacă calculatorul admite înregistrări de lungime variabilă, lui *q* i se poate da orice valoare convenabilă.

Problema alegerii valorilor lui *p* şi *q* care vor produce cicluri lungi este complicată, deoarece ea depinde de caracteristicile calculatorului cu care se lucrează. Operaţia de congruenţă implică împărţirea. Aceasta este de obicei cea mai lungă dintre operaţiile aritmetice de bază; în scopul de a o scurta cît mai mult posibil, *q* se ia de obicei egal cu numărul întreg maxim ce se poate reprezenta în calculator.

Două combinaţii, ce au fost foarte mult utilizate, sînt:

$p = 3^{17}$, $q = 2^{35}$

$p = 3^{17}$, $q = 2^{31} - 1$

Se întîmplă uneori ca, pe parcursul unui proces de simulare să fie utilizate atît de multe numere pseudoaleatoare, încît să depăşească numărul celor ce se pot obţine cu o formulă congruenţială. Este evident că acest lucru este nedorit, deoarece pot să apară corelaţii „interesante”. Această dificultate poate fi depăşită prin generarea mai multor şiruri de numere pseudoaleatoare cu ajutorul unor numere diferite între ele. Utilizînd unul dintre

şiruri, determinăm la fiecare fază a procesului de simulare secvenţa din care va fi ales numărul pseudoaleator.

6.3. GENERAREA VARIAŢIILOR ALEATOARE

Următoarea cerinţă este de a determina mijloacele necesare pentru a transforma numărul pseudoaleator generat într-o valoare a unei repartiţii. Dacă tipul repartiţiei se identifică foarte exact, în termeni matematici, atunci există mai multe variante de lucru. Ele sînt descrise în lucrările despre simulare; de exemplu, pentru a genera o valoare dintr-o repartiţie exponenţială se poate proceda conform indicaţiilor date de von Neumann. Mai întîi se generează numere pseudoaleatoare, pînă cînd se obţine o secvenţă de tipul

$$\%! > x_2 > x_3 > \ldots > x_n < a;_{n+1}. \qquad (6.1)$$

Atunci cînd acest lucru s-a realizat iar n este impar, primul număr x_3 este acceptat ca o valoare repartizată exponenţial, cu media egală cu unitatea. Astfel, valoarea căutată se determină înmulţind pe x_3 cu valoarea medie a repartiţiei. Dacă n este par, secvenţa este înlăturată şi începe generarea unei noi secvenţe; dacă aceasta este secvenţa de tipul arătat mai înainte, atunci valoarea căutată este primul număr din această secvenţă $x[$, plus 1. Dacă o a treia secvenţă este necesară, al treilea prim număr $xî'$ este adunat cu 2 ş. a. m. d. Această procedură generează valori repartizate exponenţial.

Prin ajustarea datelor observate cu o funcţie de repartiţie cunoscută poate să apară un element de aproximaţie care este nejustificat. S-ar putea să avem motive apriori pentru a ajusta datele cu o anumită repartiţie : în acest caz totul este în regulă. Dar nu este întotdeauna aşa. Alternativa este de a reduce datele observate ale repartiţiei la un tabel reprezentînd valorile cumulate ale funcţiei de repartiţife

$$y = F(x).$$

Apoi sînt generate numere aleatoare *y,* iar tabelul cu *y= F(x)* va da valorile corespunzătoare *x,* prin intermediul interpolării. Aceasta este cea mai utilizată metodă în exemplele de simulare ce vor fi prezentate în capitolele următoare.

In sfîrşit, se pune problema tehnicilor eficiente de programare. Cititorul este fără îndoială convins că sarcina scrierii programelor pentru calculator a fost mult uşurată în ultimii ani, datorită dezvoltării limbajelor simbolice de programare, dintre care unele, de exemplu limbajul FORTRAN, este specializat pentru problemele ştiinţifice matematice (în care numărul de calcule este mare, iar volumul intrărilor şi ieşirilor, respectiv al datelor de intrare şi de ieşire este mic) spre deosebire de altele, ca de exemplu limbajul COBOL este specializat pentru prelucrarea datelor economice, administrative (unde calculele sînt elementare însă numărul datelor de intrare/ieşire este enorm).

Avantajul acestor limbaje de programare este acela că instrucţiunile transmise calculatorului sînt foarte directe, iar calculatorul translatează aceste instrucţiuni simbolice în limbaj maşină (lucru realizat de către compilator), le alocă memoria necesară şi, la nevoie, dispozitive de intrare/ieşire. Odată realizate aceste limbaje de programare, printre analiştii cercetării operaţionale a apărut ideea creării unui limbaj simbolic pentru programarea simulărilor. Există mai multe „limbaje de simulare" şi printre ele, GSP, Simscript, Simula, EPPSS, şi GSL.

Fără îndoială că aceste limbaje ar uşura mult scrierea programelor pentru simulare, odată ce au fost *depăşite* dificultăţile de stăpînire a limbajului sistemelor de aşteptare. Cu toate acestea, există o problemă care se pune şi anume aceea că compilatoarele (sau programele de asamblare) pentru aceste limbaje nu pot fi utilizate pentru orice tip de calculator. Se pare că doar limbajul CSL, creat de către Buxton şi Laski, a fost implementat pe mai mult de două calculatoare, şi numai pe IBM şi Honeywell. în plus, pînă acum analistul care are acces la diferite tipuri de IBM (7090, 7094,7044) este singurul care are posibilitatea de alegere a unui limbaj de simulare dintre GPSS, SIMPAC, SIMSCRIPT şi CSL. Această limitare poate fi doar momentană, în

condiţiile în care se pregăteşte introducerea unei noi generaţii de calculatoare. în afară de cazul cînd cineva doreşte să scrie mai multe programe de simulare în fiecare an, nu cred că merită ca cineva să înveţe aceste limbaje sau sisteme care au fost dezvoltate.

O mare parte a simulărilor — şi printre ele se numără şi cele legate de sistemele de aşteptare — ocupă o poziţie intermediară între calculul matematic şi prelucrarea problemelor economico-administrative. Nu pretind că acest lucru este adevărat şi pentru simulările ştiinţifice, sau metoda Monte Carlo se aplică, problemelor pur matematice, aşa cum apar ele în fizică. Ele pot fi programate pentru scopuri practice în FORTRAN sau COBOL, fără mare pierdere de timp; iar în cazul în care va avea loc schimbarea calculatorului, repro- gramarea va fi foarte facil de realizat. Dacă cineva este un mare expert în simulare şi dacă există o cît de mică şansă ca întreprinderea la care lucrează să înlocuiască calculatorul existent, ABC 4567 printr-un XYZ 9012, atunci nu numai că este dificil să înveţe FAKEITAL sau oricare alt limbaj de simulare considerat ca cel mai eficient la momentul respectiv, dar chiar să creeze un compilator pentru acest nou calculator special pentru acest limbaj (pe care probabil nimeni altcineva nu-1 are). Ar fi foarte interesant de ştiut ordinul de mărime a economiilor care se obţin prin utilizarea acestor limbaje speciale, nu ca o proporţie a timpului sau a costului programării simulării, ci ca o proporţie a costului întregului proiect de cercetare operaţională. (Am încercat să obţin răspunsuri la această chestiune, în timpul unei sesiuni a unei conferinţe pe care am organizat-o în America de Nord. Cei cărora le-am scris dinainte despre acest lucru mi-au răspuns evaziv. Cititorul poate interpreta aceste rînduri cum doreşte.)

6.4. UTILIZAREA SIMULĂRILOR

Odată analizate cerinţele majore ale simulării, trebuie să discutăm două aspecte particulare ale utilizării lor : stabilitatea estimărilor obţinute pe baza lor şi modul optim

de planificare a experimentelor de simulare.

Am văzut anterior că un model de aşteptare, de exemplu de tipul M/Jf/1 :(oo/FIFO) în care operaţia propriu-zisă este începută dintr-o stare iniţială, la momentul 0, trece printr-o fază intermediară, tranzitorie, înainte de a ajunge în starea stabilă. Acest fenomen se întîlneşte şi în cadrul simulării. Atunci cînd se începe să se simuleze un sistem de aşteptare (sau, pentru a fi mai exacţi, să se studieze un model de aşteptare prin intermediul simulării), vor trebui date anumite valori iniţiale pentru parametrii sistemului; de exemplu, va trebui să ştim numărul clienţilor existenţi în fiecare şir (în caz că sînt mai multe), duratele serviciilor încă neterminate pentru clienţii aflaţi în curs de servire şi altele.

Este evident că aceste condiţii iniţiale vor avea un efect asupra rezultatelor finale determinate pe baza simulării făcute pentru o perioadă de timp. Problema este : care trebuie să fie durata intervalului de timp pentru care se face simularea, astfel încît să se ajungă la o stare de echilibru statistic ?

Nu există un răspuns direct, imediat, pentru această problemă, în cap. 15 vom analiza o problemă ce a fost iniţial studiată prin simulare. Această problemă presupune un sistem de aşteptare foarte riguros definit, fără nici un fel de consideraţii ambigue. Acele simulări, în care erau în jur de 20 de staţii de servire, nu au produs estimări stabile acceptabile ale 80-cuantilelor repartiţiei timpului de aşteptare, pînă cînd nu au fost simulaţi timpii de servire pentru aproximativ 1000 de clienţi. în decursul anilor, au fost propuse fel de fel de scheme pentru a surmonta această dificultate.

Prima şi cea mai elaborată schemă este aceea în care calculatorul realizează estimări la intervale date pentru un sistem de parametri selectaţi; de exemplu, determinarea probabilităţii ca timpul de aşteptare să fie nul, bazată pe proporţia clienţilor ce nu aşteaptă deloc din grupe succesive de 50 de clienţi, corelată cu proiectarea unor teste care să pună în evidenţă eventualele tendinţe de autocorelare. Putem utiliza în acest sens testul Smirnov-Kolmogorov. Atunci cînd se stabileşte că parametrii nu mai sînt autocorelaţi, rezultatele anterioare sînt eliminate şi se

continuă să se simuleze pentru o perioadă următoare, prestabilită. Acest ultim stadiu este considerat a fi „adevărata” simulare. Din păcate, nu ştiu dacă aceasta este o metodă utilizabilă practic sau nu.

A doua metodă, realizată tot cu calculatorul, este de a tipări la anumite intervale estimaţiile unor parametri selectaţi, astfel încît, la finalul fiecărei rulări, valorile succesive să poată fi reprezentate grafic şi prin aceasta să poată fi înlăturate rezultatele obţinute în faza tranzitorie. (Aceasta a fost procedura adoptată în majoritatea simulărilor prezentate în această lucrare, exceptînd cele din cap. 12.) S-a sugerat de asemenea, ca fiecare rulare să simuleze un anumit număr, să spunem 4 sau 5, de perioade ocupate, înainte să ne considerăm în echilibru statistic. Singurul dezavantaj al acestei idei ingenioase este acela că pentru intensităţi mari ale traficului perioadele ocupate sînt suficient de lungi, iar ciclurile de simulare vor deveni foarte costisitoare. De fapt, nu există o „regulă de aur” ce poate fi aplicată ca soluţie a acestei probleme, ci doar o indicaţie : atenţie'.

6.5. EXPERIMENTE DE SIMULARE

Ultima problemă majoră ce se pune acum este de a determina varianta optimă de planificare a experimentelor de simulare. Aceasta depinde de natura problemei ce trebuie soluţionată. Există două tipuri principale de probleme : probleme care implică o comparaţie între două sau mai multe moduri de organizare a aşteptării în anumite condiţii date şi probleme menite să determine estimaţii. Nu vom insista asupra acestor aspecte, deoarece această deosebire între scopuri o vom analiza în cap. 8. Vom remarca totuşi că, din punctul de vedere al simulării, ele sînt foarte diferite. Pentru a înţelege mai exact de ce este aşa, vom considera problema distorsionării datelor de ieşire.

Simularea este, în esenţă, o operaţie de transfer. Ea necesită anumite date de intrare, cum ar fi repartiţia timpului de servire, tipurile de sosiri, regulile de

determinare a disciplinei de aşteptare şi le converteşte în date de ieşire, ca de pildă repartiţia timpului total de aşteptare, proporţia clienţilor respinşi ş.a. Procesul real reprezentat de model constă de asemenea dintr-o operaţie de transfer ce acţionează asupra unor intrări similare calitativ, pentru a produce ieşiri similare. Datele de ieşire ale simulării pot diferi de cele reale în două sensuri: ele pot fi supuse erorilor sau pot fi supuse variabilităţii sau unei definiri incorecte. Altfel, spus, datele de ieşire provenite din operaţiile de simulare pot fi distorsionate. Ieşirile eronate sau defectuos definite sînt exemple de distorsiune. Există mai multe cauze ce generează aceste două tipuri de distorsiuni, cele mai importante fiind :

1. O simplificare exagerată sau pierderea în cadrul modelului a unor trăsături semnificative, care vor produce erori.
2. Modul greşit de generare a numerelor aleatoare.

Prima ar putea să nu rezulte din incompetenţa analistului de cercetări operaţionale, dar poate fi deliberată. Nu este întotdeauna necesar de a elimina erorile ce apar. Cea de-a doua poate fi controlabilă în anumite limite. Există o vastă literatură dedicată tehnicilor de reducere a dispersiei, ce nu pot fi prezentate aici.

Să considerăm un experiment de primul tip, experiment menit să compare două sisteme posibile de aşteptare. Să presupunem că problema constă în a compara eficienţa a două sisteme alternative de priorităţi de servire. Datele de intrare sînt în esenţă aceleaşi : tipurile de sosiri, repartiţiile timpului de servire, numărul staţiilor de servire. Datele de ieşire — sau, în terminologia utilizată anterior, măsura efectivităţii — sînt proporţiile clienţilor avînd de aşteptat mai mult de 1,2 respectiv 3 timpi medii de servire. (Cititorul îşi va reaminti că timpul mediu total de aşteptare nu este un parametru foarte indicat pentru asemenea situaţii.) Să presupunem că modelul de simulare produce date de ieşire distorsionate. Fie a_n a_2 şi a_3 proporţiile reale în cele două cazuri, pentru primul sistem; $p_{lţ}$ $Ş_2$ Şi Pa

pentru sistemul al doilea. Ciclurile de simulare vor furniza

următoarele rezultate :

Sistemul 1	Sistemul 2
ªî + i)n ª2 +	Pi + 1)12 p2 +
1)21 ª3 +	1)22
i)ai	Pâ + 1)32

Valorile vj reprezintă erorile statistic rezultate din generarea numerelor aleatoare, adică imprecizia sau variabilitatea. Ele au un fel de repartiţie ce poate fi estimată cu ajutorul repetării sau în alt mod. Problema care se pune este de a stabili dacă eroarea este aceeaşi pentru ambele serii ale ciclurilor, altfel spus, de a găsi cantităţile D_r şi R_r astfel încît

$$<4 — «r = D' = p; \sim P,$$

sau

$$«;/«,. = R_r = p;/p_r.$$

Dacă lucrurile se petrec astfel, existenţa erorilor nu are importanţă în compararea celor două sisteme, pentru că ele pot fi eliminate printr-o judicioasă alegere a metodei de comparare.

în cazul în care există erori proprii însăşi naturii alternativelor, va fi foarte dificil să le înlăturăm, sau chiar să le detectăm. în majoritatea modelelor de simulare a sistemelor de aşteptare ce au fost riguros construite, este foarte puţin probabil să apară erori corelate. Ca regulă generală, putem presupune că erorile sînt constante, fie

aditive, fie multiplicative. Şi dacă acest lucru este adevărat, ele nu vor conta prea mult. Prezenţa lor nu va conduce la luarea unor decizii eronate.

în mod obişnuit comparaţiile trebuie făcute pentru diferite volume de trafic. Acest lucru ne conduce la proiectarea statistică a experimentelor. Pînă în prezent s-a realizat foarte puţin în proiectarea experimentelor de simulare şi au fost puţine cazurile descrise în lite- tură în care la experimentele de simulare s-a făcut în prealabil o proiectare a experimentului. Fără îndoială, că acesta este un domeniu promiţător pentru cercetările viitoare.

în opoziţie cu acele aplicaţii care reprezintă în primul rînd comparaţii între sisteme rivale, există alte aplicaţii în care se doreşte obţi- ţinerea unor estimări pentru anume cantităţi sau parametri. Ar fi important de ştiut, de exemplu, numărul angajaţilor ce vor fi utilizaţi în anul 1970 de compania Transcedental pentru rezervări de bilete, în fiecare oră din zi. Am văzut în cap. 1, că domnul Overlander a renunţat la serviciile acestei companii deoarece serviciul ei de rezervări telefonice nu a fost capabil să facă faţă traficului din orele de vîrf. Dacă presupunem că putem avea estimări ale volumului de trafic pentru 1970, problemă asupra căreia vom reveni în cadrul următorului capitol, atunci este esenţial faptul că modelul de aşteptare utilizat să convertească corect, fără erori, aceste estimări în număr de linii telefonice şi agenţi. Nu există o cale de înlăturare a erorilor prin realizarea unei comparări a naturii problemei: nu este vorba *de care* dintre ele, ci este vorba de *cit de multe.*

Simulările menite a răspunde la aceste tipuri de întrebări trebuie realizate cu foarte multă atenţie şi trebuie testate în condiţii cunoscute, sau pe modele matematice cunoscute, pentru a asigura eliminarea erorilor ce pot apărea în datele de ieşire. Aceasta este o problemă dificilă, ce a fost puţin analizată.

Problemele de cel de-al doilea tip creează dificultăţi şi în alt sens, în problemele de primul tip, chiar dacă aceasta s-a aplicat puţin, există cel puţin o metodologie de efectuare a experimentelor. Analiza dispersiei sau alte proceduri de decizie pot fi utilizate pentru a determina cea mai bună

opţiune. Aici însă, în probleme de al doilea tip, ele nu pot fi utilizate.

Să presupunem că la un oficiu telefonic de rezervări de bilete avem un proces de aşteptare, pentru care *M/Lognormal/c* : (Z/LIFO) este un model adecvat. Şi să mai presupunem că costul lunar de închiriere a unei linii este de A $ şi cel de angajare a unui operator este de *B* $, că există *L* linii şi *c* agenţi, astfel încît costul total lunar este

$$S = AL + Bc.$$

Scopul este de a determina combinaţia pentru *L* şi *c* ce va conduce la minimizarea, costului, asigurînd în acelaşi timp ca nu mai mult de a% clienţi să fie respinşi datorită faptului că camera de aşteptare este plină, în timp ce dintre clienţii ce reuşesc să pătrundă în sistem cel mult 0% au de aşteptat mai mult de 7/p. timpi medii de servire.

Aceasta este problema determinării punctului *(Lo,* c_0) care minimizează pe & în regiunea plană definită de două relaţii generale de tipul *X(L, c)* <a, E(L, c)< F/[i; dar forma explicită a funcţiilor *X(L,* c) .şi Y(L, c) nu este cunoscută. S-ar părea că aceasta este o aplicaţie a unei tehnici iterative de căutare pe direcţii descrescătoare, dar este greu de realizat. Cititorului îi este recomandat să privească această problemă dintr-un punct propriu de vedere, după ce a analizat lucrările originale, legate de acest subiect, date la sfîrşitul acestei cărţi.

O metodă mai utilizată este de a crea graficul suprafeţelor *X* şi *Y* prin realizarea unor rulări de simulare pentru diferite combinaţii ale valorilor *L* şi c, şi apoi de a calcula costul *S* pentru fiecare pereche (L, *c)* care satisface restricţiile impuse lui *X* şi Y. In felul acesta, minimul poate fi determinat printr-o căutare şi nu una deosebit de dificilă. Invariabil, este necesar de a determina minimul prin interpolare.

Poate că cititorul va considera acest mod de lucru ca fiind costisitor şi imprecis. Dacă sînt create suficiente simulări pentru determinarea grafică perfectă a legăturilor dintre *(L, c)* şi (A, F), astfel că interpolarea finală să determine valorile optime L_o şi c_0, atunci este aproape sigur

că costurile de calcul vor fi ridicate. Pe de altă parte, dacă se consideră un număr redus de rulări, precizia cu care se determină optimul (Z_o, c_0) este foarte scăzută.

Oricum însă, această metodă este des utilizată şi a fost adoptată pentru studiul descris în cap. 15.

6.6. CONCLUZIE

Tehnicile de simulare sînt foarte utile atunci cînd se realizează comparaţii între forme alternative de organizare a facilităţilor de servire, iar modelele teoretice lipsesc. Aceasta ar putea fi chiar unica soluţie de rezolvare. Cu cît eroarea concluziilor unui proiect de aşteptare este mai mare, cu atît sînt mai utile tehnicile de simulare.

în celelalte cazuri, metodele de aproximare sînt mai clare, mai puţin costisitoare, mai rapide şi creează mai puţine dificultăţi.

Atunci cînd un matematician afirmă că a rezolvat o problemă de aşteptare, el înţelege prin aceasta că a construit un model al procesului real din care derivă problema, apoi a dedus să zicem o expresie formală a repartiţiei timpilor totali de aşteptare în funcţie de disciplina de aşteptare şi de repartiţia sosirilor şi timpilor de servire. Soluţia poate lua forma unei ecuaţii integro-diferenţiale, asemănătoare celor ale lui Takacs, ecuaţii care în general nu pot fi reduse la forme algebrice sau funcţii cunoscute. într-un anumit sens o asemenea expresie formală constituie soluţia problemei; de aici se ■ pot deduce anumite proprietăţi ale modelelor de aşteptare. Totuşi aceasta nu este o soluţie în sensul comun al cuvîntului, folosit de majoritatea oamenilor.

Practicienii din domeniul cercetării operaţionale sînt preocupaţi de determinarea în timp util a soluţiilor pentru problemele ce apar în lumea reală. Fără îndoială că este

foarte dificil să analizezi şi să rezolvi astfel de sisteme, datorită numărului extrem de mare de parametri ce trebuie luaţi în considerare, a instabilităţii lor etc. De aceea, şi în cercetarea operaţională ca şi în matematică, fizică sau economie, aşa cum arătăm în oap. 2, este absolut necesar a se crea modele ideale. Aceste este primul pas spre formalizarea problemei; următorul pas este definirea oonceptului de soluţie. După cum în matematică Kronecker insista asupra faptului că teoremele de existenţă: sînt inadmisibile, iar demonstraţiile matematice, pentru a fi acceptate, trebuie să fie constructive (adică, de exemplu, ele nu trebuie să arate doar că există o infinitate de numere prime, ci să indice şi cum pot fi ele construite), tot aşa, pentru a considera validă o soluţie în lumea reală, ea trebuie să ne indice şi modul de a acţiona. Ideile pe oare le au practicienii cercetărilor operaţionale despre natura soluţiilor problemelor pe care le încorporează în modele au un caracter special şi sînt deduse din anumite concepţii teoretice din fizica teoretică şi ştiinţele economice.

Teoriile clasice ale fizicii şi economiei se bazează pe două concepte : conceptul de echilibru şi conceptul de optim. De exemplu, un sistem mecanic tinde spre o stare de echilibru, o stare în care o funcţie obiectiv este minimizată. în teoria beneficiului, un patron acţionează în funcţie de modificările ce au loc pe piaţă, astfel încît să-şi maximizeze beneficiul. Aceasta înseamnă că el caută o nouă stare de echilibru compatibil cu optimizarea unei funcţii obiectiv. Aceste idei au pătruns şi în cercetarea operaţională. Morse şi Kimball, în lucrarea lor *„Methods of Operaţional Research”*, subliniază necesitatea găsirii unor măsuri ale eficacităţii sau a unor funcţii obiectiv şi a optimizării lor. în cercetarea operaţională, soluţie începe să însemne optimizarea unui model bine determinat.

Nemulţumirea analiştilor de cercetare operaţională constă în aceea că în general executanţii lucrărilor nu sînt foarte receptivi la indicaţiile ce li se dau, ba uneori nici nu le dau prea mare atenţie. Pentru a explica această stare de lucruri au fost formulate mai multe motive, s-a enunţat o întreagă gamă de opinii, de la autosubapreciere („riu ştim cum să vindem produsele d-voastră”) pînă la abuzivul

„conducătorii şi executanţii sînt prea incapabili şi reacţionari”. Cu toate că ar fi greşit să-i considerăm pe toţi analiştii de cercetare operaţională de talia liii Albert Laskers §§§§§ sau că toţi conducătorii sînt de talia lui Alfred Sloan******, nu acestea sînt cazurile unui fenomen atît de extins, aproape universal. Realitatea constă în existenţa unei divergenţe de opinii dintre cercetători şi executanţi, în ceea ce priveşte' înţelesul noţiunii de soluţie.

în timp ce analiştii cercetării operaţionale se plîngeau că executanţii nu dau atenţie sugestiilor lor, economiştii au avut nemulţumiri asemănătoare, că oamenii de afaceri nu le dau atenţie.

în ultimii ani, mulţi economişti, mai cu seamă din Statele Unite, au căutat să descopere adevăratele cauze ale neînţelegerilor iscate între ei şi oamenii de afaceri. Cu toate că ei continuă să se plîngă că oamenii de afaceri ignoră teoria economică (ceea ce ar putea fi adevărat), economiştii au încetat de a-i mai considera incapabili (ceea ce nu întotdeauna este adevărat). Economiştii au ajuns la două concluzii: prima este că tendinţa academică de a analiza problema, prin intermediul unor modele bine definite, nu este împărtăşită de către oamenii de afaceri; a doua, arată că oamenii de afaceri — chiar şi antreprenorii — nu acţionează şi nu pot acţiona consecvent conform unei singure reguli simpliste, aşa cum este maximizarea beneficiilor.

Prima concluzie înseamnă următoarele : cei ce iau decizii în administraţie, forţele armate, în afaceri şi industrie nu gîndesc- procesele operaţionale şi tendinţele lor prin intermediul unor modele bine definite : imaginea lor este cea pe care o ai cînd te uiţi prin sticlă mată.

A doua concluzie arată că executanţii nu acţionează ca pentru a atinge un punct final dorit; cu alte cuvinte, să maximizeze funcţia obiectiv aşa cum este beneficiul. A fost lansată ideea că ei ar acţiona de o asemenea manieră, încît să asigure cît mai mult posibil supravieţuirea întreprinderii.

---

§§§§§ **Un expert american, ce a realizat succese în domeniul reclamelor.**

****** **Fostul patron al companiei General Motors.**

Baumol a mers mai departe cu această teorie, sesizînd că ei acţionează ca pentru a maximiza beneficiul cu condiţia satisfacerii anumitor restricţii (de exemplu, rata de amortizare a investiţiei să nu fie sub 12%). Aceasta este o idee excelentă, ce şi-a găsit deja locul printre principiile şi metodele cercetării operaţionale, prin intermediul programării liniare. în spatele ei stă o impunătoare dezvoltare matematică, ce a început de la Lagrange.

Se mai poate spune că obiectivele oamenilor de afaceri sînt calei- doscopice. Ei au foarte multe scopuri, unele din ele chiar contradictorii, iar balanţa importanţei unuia sau altuia este în permanentă schimbare. Faptul că Baumol vorbeşte de o maximizare cu restricţii implică existenţa mai multor factori în cadrul unei situaţii ce au tendinţa de a se opune unul altuia. Dacă toţi cresc sau descresc împreună, nu ar mai fi necesară optimizarea prin introducerea unor restricţii.

Şi totuşi, care este legătura dintre aceste lucruri, cercetarea operaţională şi soluţia problemelor operaţionale?

Argumentele aduse de economişti indică motive pentru inaccep- tabilitatea multor rezultate ale cercetării operaţionale, inclusiv aplicaţii ale teoriei aşteptării. Şi aceasta ca urmare în primul rînd a preocupărilor exagerate pe care teoreticienii le au pentru teorie şi precizie atunci cînd prima este imposibilă, iar ultima inutilă şi în al doilea rînd insistenţei asupra găsirii unei funcţii obiectiv care niciodată nu este în perfectă corespondenţă cu scopurile de compromis ale executanţilor. Cu alte cuvinte, tehnica de obţinere a soluţiilor prin procedeele clasice de optimizare nu este admisibilă în toate cazurile şi aceasta nu pentru că este o tehnică şubredă, ci datorită variabilităţii caracteristicilor funcţiei obiectiv.

în scopuri practice modelele proceselor de aşteptare sînt aplicate în trei direcţii principale. :

1. în planificarea repartizării noilor facilităţi pentru operaţiile în care aşteptarea, sau aglomerarea, este un factor important.
2. în evaluarea strategiilor de desfăşurare a forţei de muncă pentru facilităţile existente, astfel încît să se realizeze condiţii de servire standard şi cu preţ redus.

3. Pentru compararea diferitelor forme de organizare a facilităţilor de servire.

Este neîndoielnic că problemele tehnice ale formării şi analizei modelelor de aşteptare, menite să previzioneze necesarul de capacitate a noilor facilităţi, sînt foarte anevoioase. în cap. 13 vom analiza o asemenea situaţie. Dar modelele de aşteptare nu sînt singura sursă de dificultăţi. O mare importanţă trebuie acordată previziunii parametrilor modelelor. Sigur că prognoza poate fi uneori hazardată, şi este probabil să se utilizeze una ce nu dă rezultate satisfăcătoare. De exemplu, chiar şi cu ajutorul unor tehnici cum ar fi ajustarea exponenţială a seriilor de timp (dar nu încă a modelelor econometrice) se consideră a fi satisfăcătoare o prognoză pentru un an, ce dă traficul lunar de curse aeriene de pasageri dintr-un aeroport, cu o abatere de 5% (în plus sau în minus).

Prognozele orare au un grad şi mai mare de nesiguranţă. Remarcaţi c-ît de dificil este a determina, să spunem cu cinci ani înainte, costul planificării şi realizării unui nou aeroport. O eroare de 25 % în prognozele zborurilor lunare ar putea fi, în acest caz, satisfăcătoare. în plus, ar fi dificil de prevăzut exact care va fi timpul mediu de servire, mai cu seamă dacă activităţile ce constituie operaţia de servire sînt noi, sau aranjate într-o formă nouă. (în cap. 10 a fost ales un exemplu de acest fel.) Chiar şi cel mai competent inginer nu este dotat cu puteri supranaturale!

în aceste condiţii căutarea unui model de aşteptare elegant şi riguros este greşită.

Inevitabil, la sfîrşitul lungilor şi dificilelor serii de calcule ale cerinţelor viitoare, în care precizia depinde direct de volumul de date de previzionat, de durata de studiu şi de conştiinţă profesională, inginerii consultanţi sau arhitecţii, bazîndu-se pe experienţa lor, vor adăuga cel puţin 10 % la fiecare calcul. Cu alte cuvinte, din punct de vedere practic, este foarte neeconomic să se determine conştiincios şi exact valorile strategice ale modelului, în condiţiile unei planificări pe termen mai lung. Este însă esenţial să dăm răspuns la întrebarea : care trebuie să fie gradul de precizie al modelului, sau cît putem noi realiza ?

A doua clasă de utilizare a modelelor de aşteptare constă din aplicaţiile menite să determine desfăşurarea facilităţilor existente. Se remarcă că aceasta reprezintă o situaţie cu totul diferită de cea prezentată anterior. Ne putem imagina în acest caz că staţiile de servire există deja şi problema care se pune este de a determina numărul celor ce lucrează în diferite momente ale zilei, în diferite zile ale săptă- mînii etc., pentru a crea un serviciu standard.

Acest lucru poate fi realizat cu ajutorul prognozei pe termen scurt a volumului de trafic (utilizînd traficul în sens Erlang) pusă la înde- mîna managerului.

Trebuie totuşi să menţionăm că de obicei un manager preferă să utilizeze formule foarte simple care să-l ghideze printre multiplele sarcini care le are de îndeplinit. în acest caz, simplitatea înseamnă aproximare. în cap. 15 se va analiza un astfel de caz. Un model cu un înalt grad de fidelitate în reprezentarea realităţii va fi foarte complex, cu grad mare de precizie şi deci aproape inutil. Un model cu un grad scăzut de fidelitate în reprezentarea realităţii poate fi mai simplu, nu tot atît de precis, dar util. Cititorul va decide care ar trebui să fie alegerea făcută de către un analist de cercetare operaţională.

în sfîrşit, au rămas problemele de comportare a diferitelor forme de organizare a facilităţilor de servire. Să presupunem că există trei posibilităţi de combinare. (Cititorul este rugat să-şi amintească sugestiile d-lui Murdo Macdonald din cap. 1 sau să se uite peste exemplul dat în cap. 9.) Să presupunem în continuare că traficul, exprimat în erlangi, este constant şi independent de natura combinaţiei. Pentru simplificare, să considerăm că problema este de a decide care variantă produce cel mai scăzut timp mediu de aşteptare, pentru un număr dat de staţii de servire.

Cîteodată este posibil să se răspundă la această întrebare fără a face nici un calcul, bazîndu-ne doar pe experienţă. De exemplu, presupunînd că repartiţia timpului de servire nu este afectată de natura variantei alese, atunci este limpede că o variantă ce va crea o utilizare deplină a staţiilor va fi preferată altei combinaţii ce nu implică acest lucru. Sau o variantă care încurajează mobilitatea clienţilor între şirurile de tipul „bilet-ghişeu” va fi preferată unei variante ce nu

realizează acest lucru, deşi nu este atît de favorabilă ca un sistem „maître d'hotel", cu posibilitatea maximă de servire, în asemenea condiţii, sînt satisfăcătoare şi concluziile generale rezultate chiar din modelele deduse din ecuaţii integro-diferenţiale. Problema ce se pune este de a identifica repartiţia timpului de servire, ordinea sosirilor şi disciplina de aşteptare şi nu de a le calcula precis.

în alte condiţii nu este suficient să cunoşti care combinaţie este mai eficientă; trebuie cunoscut şi cu cît este mai eficientă o variantă decît celelalte, căci costurile asociate variantelor pot diferi. Aceasta introduce un nou element al problemei, care poate fi reprezentat în felul următor :

Varlantâ	Costul forţei de munc&/om	Cheltuieli de lntreţlnere/an	Timp mediu de aşteptare/ client
1	45	20	14/|i
2	15	40	1,2/fx
3	10	50	0,9/fi

Termenul „cheltuieli de întreţinere" semnifică cheltuielile de achiziţie a utilajului (instalaţiei) şi de menţinere în funcţiune. Cheltuielile de întreţinere includ deprecierea şi cheltuielile de menţinere care, pentru orice combinaţie, se presupun a fi constante. Tabelul arată comparaţiile realizate pentru timpi de aşteptare egali. Variaţia cifrelor din ultima coloană este consecinţa faptului că numărul de anga-, jaţi este o variabilă discretă. De aceea, este practic imposibil a egaliza timpii medii de aşteptare prin manevrarea forţei de muncă. Remarcăm că, din punct de vedere financiar, a doua variantă este cea mai favorabilă. Aceasta este o situaţie clasică. Totuşi costul forţei de muncă poate varia ca rezultat al unor negocieri asupra salariului, în timp ce cheltuielile de întreţinere rămîn aceleaşi. în acest caz problema este : în ce condiţii de modificări ale costurilor, varianta a doua rămîne cea mai bună ? Cititorul va remarca faptul că varianta secundă continuă a fi cea favorabilă pînă cînd costul forţei de muncă se dublează. Probabil că aceasta nu se produce curent, şi dacă este aşa, putem spune că „soluţia" — potrivit

căreia varianta secundă este cea mai bună — nu este influenţată de costuri. Pot apărea însă şi alte efecte.

De exemplu, rata creşterii forţei de muncă cu volumul traficului, pentru menţinerea unui serviciu standard, poate diferi de la o variantă la alta. Acesta este un fenomen des întîlnit, în special cînd timpii medii de servire diferă între variante (vezi cap. 9). Astfel, o creştere de 15 % a volumului traficului poate da următoarele rezultate :

Variantă	Costul forţei de muncă/an	Cheltuielile patronul ul/an	Timpul mediu de aeteptare/clle nt
1	**60**	**25**	**1,0/ti**
2	**25**	**43**	**0,8/p.**
3	**13**	**52**	**0,9/p.**

Varianta a treia este acum cea mai eficientă. „Soluţia” pe care am găsit-o este influenţată de modificările volumului traficului.

Exemplele prezentate sînt artificiale; dar ele se bazează pe o experienţă suficient de convingătoare. Cazurile ce vor fi prezentate în capitolele ce urmează vor ilustra fenomenele posibile. Cînd se constată că previziunile pot fi eronate, că restricţiile operaţionale se pot modifica şi că orice presupunere făcută asupra valorilor parametrilor poate fi invalidată de evenimente, este lesne de înţeles că „soluţia” ce trebuie căutată este caracterizată prin robusteţe.

Punctul de vedere ce a stat la baza acestei argumentări este următorul : este puţin recomandabil a construi modelul unui proces şi prin analizarea sa să se tragă concluzii definitive — ca de exemplu, „portul necesită două noi dane pînă în 1970” — fără a verifica senzi- tivitatea modelului. Unele modificări făcute valorilor parametrilor au un efect important asupra intensităţilor traficului. în aceste condiţii, nu există distincţii clare ce trebuie făcute între unele răspunsuri şi altele. Astfel şi-au făcut apariţia mulţimile vagi (fuzzv) ale bussinesmanului.

De exemplu, dacă curbele caracteristice costului (cheltuielile forţei de muncă plus cheltuielile de întreţinere)

ar fi fost proiectate pentru cele trei sisteme diferite din exemplul nostru în condiţiile unui trafic diferit, pentru fiecare s-ar fi găsit un alt punct de minim. Dar, deoarece nu se poate cunoaşte exact dacă coeficienţii funcţiei costurilor au fost corect determinaţi, pot apărea anumite oscilaţii verticale. Pentru diferite valori ale acestor coeficienţi, curbele se vor intersecta în puncte diferite, iar minimul se va modifica, ca în exemplul considerat. Astfel, sînt introduse şi oscilaţii orizontale. în aceste condiţii, este puţin probabil ca modelele foarte sofisticate să servească scopului ce ni-1 propunem.

O soluţie operaţională a unei probleme de aşteptare este orice soluţie suficient de judicios evaluată pentru a conduce la o decizie corectă. Ea poate să nu se bazeze pe un model foarte complicat.Ea poate fi dedusă şi din anumite constatări evident neadevărate legate de natura repartiţiei timpului de servire. Lucrul cel mai important în cercetarea operaţională nu este de a obţine soluţii în sens matematic, ci soluţii operaţionale, ce vor conduce la elaborarea unor decizii valide, executabile.

TREI TIPURI DE APROXIMĂRI

în cadrul capitolelor precedente am prezentat unele problemt teoretice ; cele ce urmează au legătură directă cu aplicaţiile practice, Acest scurt capitol este o punte de legătură între ele şi este un prilej de a relua argumentarea fundamentală a acestei lucrări.

în principiu, atît din punct de vedere teoretic cît şi estetic, varianta cea mai dorită de rezolvare a problemelor legate de sistemele de aşteptare constă în a construi un model matematic foarte fidel şi a determina soluţii prin analiza acestui model. S-a spus suficient de mult despre dificultăţile matematice ce intervin în analiza modelelor, chiar şi pentru cele mai simple sisteme, astfel încît se pune problema : „Tratarea ideală este oare posibilă?”. Examinarea analizelor matematice făcute în capitolele 2 şi 5 pare a duce la concluzia că numai modelele elementare pot fi supuse unei analize matematice exacte şi că aceste modele nu au legătură cu procesele ce se întîlnesc frecvent în lumea reală. Cazurile ce vor fi prezentate în capitolele următoare vor demonstra că sistemele cotidiene de aşteptare nu au o structură atît de complicată ca cea a modelelor de aşteptare ce au fost amplu analizate pînă în prezent. Putem conchide că tratarea ideală, tradiţionala procedură ultraştiinţifică a cercetării operaţionale, în general, nu poate fi realizată. Se pare că reprezentarea sistemelor de aşteptare cu ajutorul modelelor matematice foarte fidele nu poate fi realizată adesea, iar dacă da, atunci modelele nu pot fi analizate profund. Aceasta a dus la crearea tehnicilor de simulare. Am

vorbit în cap. 6 despre aceste tehnici pentru a sugera că, folosindu-le, nu se pot obţine chiar atît de uşor pe cît se pare rezultate exacte privind sistemele de aşteptare. Apar mai multe dificultăţi: comportarea tranzitorie, mărimea selecţiilor (lucrarea lui Gebhart, prezentată în anexa 1, este recomandată celor care nu cred că aceasta ar reprezenta o dificultate) şi proiectarea experimentală.

Atît procedura tradiţională cît şi tehnica simulării tind spre a atinge precizia maximă. Procedura tradiţională nu este adesea utilizabilă ; simularea însă da, şi se pot obţine răspunsuri suficient de precise, dar cu un cost de calcul relativ ridicat. Din păcate, tocmai în astfel de situaţii, care au o mare importanţă practică — ca de pildă, cele legate de intensităţile mari ale traficului — ciclurile de simulare trebuie să fie foarte lungi, pentru a atinge performanţele dorite. în capitolul precedent ne întrebăm „Oare este atît de necesară o precizie ridicată F'. Şi răspunsul la această întrebare era că în multe situaţii nu este necesară, iar pentru a indica de ce trebuie să fie aşa a fost introdusă ideea de soluţie operaţională. Conceptul de soluţie operaţională nu este analizat *in extenso* în această lucrare : cititorul va fi capabil să o raporteze la cercetările întreprinse în domeniul proceselor de decizie executivă şi al teoriei deciziei.

Odată acceptată ideea că a căuta modele exacte şi riguroase, ce vor determina rezultate numerice sau analitice neperturbate, este o greşeală, şi că o aproximare cu un grad acceptabil de precizie este calea de urmat, atunci putem privi în cu totul alt mod atît procedura de construire a modelului matematic cît şi tehnicile de simulare.

Argumentul acestei lucrări este că teoria aşteptării este utilă, în pofida complexităţii matematice, pe de o parte, şi unor inadvertenţe practice, pe de altă parte, teoria în forma ei actuală poate determina soluţii operaţionale pentru multe situaţii. Aceasta cere însă ca să se accepte necesitatea aproximaţiilor de primul tip, adică aproximarea prin utilizarea modelelor foarte simplificate. Alt mod de redare a acestei idei este că primul tip de aproximare constă în a obţine soluţii operaţionale prin apelarea modelelor care sînt, apriori, eronate, dar sînt suficient de simple pentru a le putea manipula. Capitolele ce urmează, şi în special

capitolele 10, 11 şi 12, conţin cazuri practice ce vor arăta aplicabilitatea acestei proceduri. Nu o să mai insistăm acum asupra acestor lucruri, exceptînd faptul că pentru un analist de cercetare operaţională procedura ar fi deosebit de utilă, poate cea mai utilă dintre toate.

în cazul în care aproximarea de primul tip este considerată a fi inacceptabilă, este necesar a utiliza simularea. Aceasta ar fi necesară în următoarele condiţii : în cazul că riscul luării unei decizii eronate datorită modelului foarte simplificat nu este cunoscut, sau în cazul că penalizările pentru o decizie eronată sînt foarte mari. Prima dintre aceste condiţii ţine de experienţa cercetătorului : în cercetarea operaţională continuă să aibă o pondere importantă arta şi îndemînarea cu care lucrezi.

A doua este un criteriu mai obiectiv. Modelele de simulare sînt o formă a aproximării, dar aproximarea este de un tip cu totul diferit aceleia rezultate din procedurile clasice de construire a modelelor. Utilizînd un mare volum de muncă, este posibil a simula procesul de aşteptare de o manieră foarte apropiată de realitate. Fidelitatea modelului de simulare poate fi mai ridicat decît a oricărui alt model construit prin metode matematice pure. Calitatea aproximativă a simulării este o consecinţă, aşa cum am văzut în capitolul precedent, a generării de numere aleatoare, adică a introducerii erorilor statistice de selecţie. Dar, prin multiple încercări, acestea pot fi reduse şi în principiu simulările pot avea un grad de precizie oricît de înalt. Din păcate, nu este întotdeauna posibil a aloca sume imense corespunzătoare costului unui număr foarte mare de cicluri de simulare şi de aceea este recomandabil să se utilizeze al doilea tip de aproximaţie. Şi deoarece pentru a găsi o soluţie operaţională nu este întotdeauna absolut necesar un rafinament extrem, aproximarea de tipul al doilea este validă şi folositoare.

Principiul aproximării de tipul al doilea este următorul : un sistem este simulat în anumite condiţii, astfel încît se obţin puncte pe suprafeţele de răspuns ce interesează. Acestea devin apoi obiectul analizelor statistice cu scopul determinării unor relaţii empirice dintre diferiţii factori (staţii de servire, traficul, prioritătile, timpii de servire etc.),

ce pot fi apoi trataţi ca un model de ordinul doi al sistemului. Este o înlocuire a experimentării sistemelor din lumea reală. Un exemplu de utilizare al acestei tehnici este prezentat în cap. 15.

Al treilea tip de aproximare este cel clasic, utilizat în matematică, fizică şi în mai toate domeniile. Acesta este exemplificat prin două metode :

1. Dezvoltarea unor funcţii imposibil de manipulat în serii de puteri, în care termenii de rang mare pot fi ignoraţi, pentru anumite domenii de variaţie ale variabilelor.
2. Substituirea valorilor iniţiale în formulă, urmată de procesul iterativ.

Aceste proceduri clasice au fost utilizate în studiul modelelor de aşteptare, dar nu atît de mult cum s-ar putea crede. Avantajul acestui tip de aproximare (comaparativ cu celelalte două) este relativa uşurinţă în estimarea erorilor rezultatelor. Probabil că cea mai specta-

culoasă utilizare a acestui tip de aproximare a fost realizată de Eiordan, care a ajuns la formulele, prezentate în capitolele 3 şi *4,* pentru repartiţiile timpului de aşteptare în cazuî modelelor :
(oo/SIEO) şi *MjMIc:* (oo/SIEO), formule care au constituit baza calculelor făcute pentru realizarea graficelor necesare determinării rapide a rezultatelor acestor modele.

Merită să mai menţionăm alte două exemple de utilizare al primului tip de aproximare matematică şi unul pentru al doilea tip; toate trei se referă la modelul de aşteptare *M/D/c :* (OO/FIFO). Molina a determinat următoarele formule aproximative pentru timpul mediu de aşteptare şi pentru probabilitatea ca toate staţiile de servire să fie ocupate:

$$w_q = P(t > 0)\frac{1}{[ic(1-p)c+1\ 1 - p^c}\ .$$

$$P(\text{« > 0}) = \frac{X^c e^{-z}\ c}{1 - e^{-\text{“ V (X”/n!) H}}} \qquad (8\text{-}1)$$

Pollaczek a determinat formule mai simple pentru aceleaşi mărimi ce sînt folositoare în special cînd există un număr mare de staţii de servire. Eezultatele obţinute sînt :

$$W_9 = \frac{1}{cf2\hat{}c\ (1-p)^2} + o\left(\frac{1}{c}\right)\Bigg]$$

$$P(t > 0) = 1 - W_9(0) = \frac{1}{i - p\ p\ y\ 2KC} \qquad (8.2$$

Cititorul va remarca că utilizînd aproximarea factorialelor dată de Stirling este posibil a ajunge la rezultatul lui Pollaczek pentru W_a plecînd de la rezultatul lui Molina.

în sfîrşit, în 1953 Everett publică o procedură iterativă de

calcul a probabilităţilor stării stabile, $p_{„,}$ pentru acest model de aşteptare.

Procedura sa, care este prea vastă pentru a o prezenta complet, depinde de observaţia că pentru valori mari ale lui *n*

$$Pn + c \quad Pn-$$

Această relaţie a fost combinată cu ecuaţiile lui Crommelin pentru $p_{,,,}$ deducîndu-se o relaţie de determinare a lui ce pare a juca un iol în modelul *M/D/c:* (oo/GD) similar cu cel jucat de p în modelul *MIM/c* : (oo/GD). Ca urmare, Everett a introdus valoarea sa pentru 4» în formulele lui Erlang legate de modelul anterior, pentru a obţine noi estimaţii pentru p_n. Aceste valori sînt apoi utilizate în ecuaţiile modelului cu timpi constanţi de servire, procesul fiind iterat pînă la atingerea unor estimaţii stabile. Apare astfel necesitatea ca cercetătorii să dezvolte aproximaţiile matematice de acest tip şi este surprinzător că pînă acum nu s-a acordat mai multă atenţie acestor probleme.

Cu aceasta am încheiat partea teoretică şi „filozofică-' a lucrării. Următoarele capitole, exceptînd concluziile, tratează exclusiv probleme ale aplicaţiilor practice.

SISTEME DE REZERVARE DE LOCURI

Primul dintre sistemele reale de aşteptare pe care le vom analiza este cel observat pe parcursul studiului sistemului de transport de mărfuri al unei companii aeriene ††††††. Fără îndoială că există sisteme similare şi în alte situaţii, iar problemele legate de acest sistem sînt, probabil, printre cele mai comune pe care le întîlneşte un analist de cercetare operaţională. Sistemul în sine este destul de adecvat,pentru aplicarea teoriei aşteptării, astfel încît este util să începem analiza cu o astfel de problemă.

9.1. DESCRIEREA PROBLEMEI

într-unul din oraşele principale pe care le serveşte, Compania aviatică Europa Airways Corporation (EAC) întreţine un vast departament pentru organizarea transportului mărfurilor. Atunci cînd un expeditor doreşte să obţină spaţiu în cadrul unui zbor EAC, spre un alt oraş, îl poate obţine chemînd la telefon Centrul de rezervări EAC, existent în cadrul aeroportului (detaliile privind procedura

†††††† **Acest capitol a fost mult simplificat de două studii realizate de autor şi de colegii de la BEA In 1957 şi 1958. S-a utilizat o formă narativă pentru a accentua faptul că evenimentele şi cauzele lor au fost rearanjate şi prezentate lntr-o altă formă. S-au menţinut reale datele şi legăturile existente. Materialul a fost prezentat cu acordul BEA.**

de rezervare nu ne interesează). Toate apelurile provenite de la clienţi sînt direcţionate, prin intermediul unui tablou de distribuţie, spre un grup de zece linii telefonice, iar prin intermediul acestor linii apelul poate ajunge la cinci angajaţi. Adică oricare dintre cei cinci angajaţi pot rezolva un apel sosit pe oricare dintre cele zece linii. Dacă apelul soseşte atunci cînd tabloul de distribuţie este blocat, apelul va fi respins sau pierdut; dar acest caz are loc suficient de rar şi-1 vom putea ignora. Dacă toate cele zece linii sînt ocupate, apelul este reţinut la tabloul de distribuţie; dacă există linii libere, dar toţi agenţii sînt ocupaţi, apelul este reţinut pe una dintre liniile libere. în ambele cazuri apelul aşteaptă.

Departamentul de relaţii cu publicul din cadrul EAC a primit o serie de plîngeri din partea clienţilor că, într-o anumită perioadă a zilei, ei trebuie să aştepte excesiv de mult înainte ca apelurile lor să fie preluate de către agenţi. în acelaşi timp în cadrul departamentului au apărut anumite probleme de utilizare a forţei de muncă, care implică necesitatea unei reorganizări radicale. Ca urmare, directorul general a elaborat un proiect de reorganizare care, printre altele, afectează şi serviciul de rezervări telefonice. în proiectul său se arată că activitatea serviciului de rezervare poate fi clasificată în funcţie de destinaţia geografică a coletelor şi, după o scurtă analiză, el a stabilit cinci categorii de trimiteri, anume spre : 1) Insulele britanice; 2) nordul şi estul Europei; 3) sudul Europei; 4) Orientul Apropiat; 5) Africa. în proiectul său va exista cîte o secţie pentru fiecare dintre aceste categorii de trimiteri, iar în cadrul fiecărei secţii angajaţii vor efectua rezervări, înregistrări, întocmiri de facturi etc. Centrul de rezervări actual va fi desfiinţat şi fiecare secţie va avea propriile linii telefonice.

în timpul discuţiilor purtate directorul general al Companiei EAC a relevat faptul că traficul telefonic legat de fiecare dintre cele cinci zone este diferit (de exemplu există de două ori mai multe apeluri pentru trimiteri de colete către nordul şi estul Europei, decît cele spre Orientul Apropiat) şi că existenţa unui singur telefon în fiecare secţie nu va asigura un serviciu egal tuturor clienţilor. El susţine că probabil anumite seeţii vor necesita două sau chiar trei

linii telefonice şi angajaţi. Astfel, numărul total de angajaţi în cele cinci secţii poate fi mai mare decît cinci. Se pune întrebarea : „Poate să-şi permită compania o asemenea creştere de personal” ? în acest moment putem considera că este cerută părerea unui analist de cercetare operaţională (pe care-1 vom numi dr. Wiley).

9.2. PRIMA FAZĂ

Primul pas făcut de dr. Wiley a fost de a vizita Centrul de rezervări în scopul de a observa operaţiile curente. El a constatat astfel că în faţa fiecărui angajat există un sistem de vizualizare în care fiecare dintre cele zece linii este reprezentată de un bec alb şi unul roşu. Atunci cînd un apel aşteaptă pe una dintre linii, se aprinde becul roşu corespunzător; iar cînd apelul a fost preluat, se aprinde becul alb. în consecinţă, este destul de uşor să culegem date privind timpii totali de aşteptare la telefon; timpul total de aşteptare al unui apel se poate cronometra între momentul aprinderii becului roşu şi momentul aprinderii becului alb corespunzător.

La apeluri nu se răspunde în ordine, căci angajaţilor le este greu să reţină ordinea de aşteptare. Apelurile sînt rezolvate, aparent, în ordine aleatoare.

Dr. Wiley a decis că trebuie să aibă anumite date înainte de a continua analiza; din păcate însă liniile telefonice nu au dispozitive de măsurare; cu toate acestea, el găseşte posibilitatea de a aranja cu şeful centralei telefonice a aeroportului ţinerea evidenţei tuturor apelurilor către centrul de rezervări în timp de o săptămînă. La sfîr-

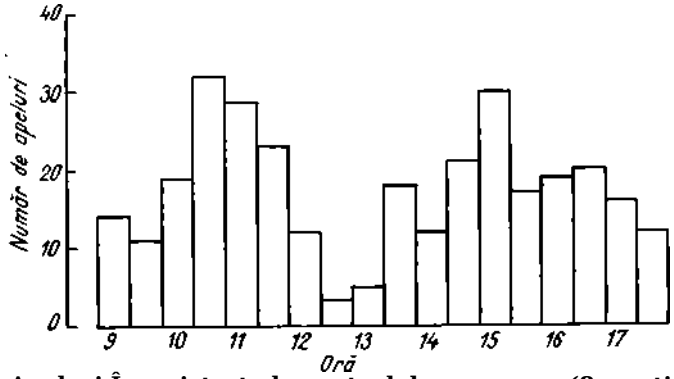


Fig. 9.1. Apeluri Înregistrate la centrul de rezervare (8 martie 1957).

şitul săptămînii primeşte datele şi constată că numărul apelurilor în zilele de luni pînă vineri este repartizat în acelaşi mod (v. fig. 9.1). Sîmbătă şi duminică apelurile sînt mai puţin numeroase iar repartiţia lor este alta. Dr. Wiley şi-a dat seama că nu sfîrşitul de săptămînă trebuie avut în vedere, deoarece atunci sînt probleme mai puţin numeroase. Trebuie acordată atenţie doar celor cinci zile lucrătoare; în special trebuie concentrată atenţia asupra comportamentului sistemului în *perioadele de aglomeraţie,* pentru că în aceste perioade este cel mai probabil ca sistemul să fie supraîncărcat. Diagrama arată că perioadele ocupate din zi sînt între 10,30—12 şi 14,30—15,30.

Următorul pas este de a observa sistemul în timpul perioadelor de aglomeraţie. Dr. Wiley şi asistentul său reuşesc să înregistreze următoarele informaţii legate de apelurile din perioadele de aglomeraţie, folosind sistemul de vizualizare al angajaţilor :

intervalele dintre apelurile consecutive;

timpii de aşteptare pentru mai multe apeluri; timpii de servire pentru mai multe apeluri.

Intervalele dintre apelurile consecutive, pe parcursul a patru intervale de jumătate de oră din perioadele ocupate, sînt testate prin testul indicelui de dispersie Poisson bazat pe gruparea în 15 intervale de cîte 2 minute. Toate cele patru eşantioane ale apelurilor dau dreptul să se facă ipoteza că sosirile sînt repartizate Poisson.

Există două tipuri de apeluri telefonice : 10 % sînt informative şi sînt rezolvate foarte rapid (de exempiu : „Mîine există vreo cursă spre Praga?”), celelalte sînt apeluri pentru rezervări de spaţii de transport.

Repartiţiile timpilor de servire pentru ambele tipuri de apeluri sînt unimodale în apropierea lui zero şi, după cum a putut remarca cu uşurinţă Wiley, pot fi suficient de bine aproximate cu repartiţii exponenţiale, cu mediile de 3,2 şi respectiv 3,7 minute.

Dr. Wiley a remarcat de asemenea un fapt semnificativ în legătură cu activitatea depusă de un angajat atunci cînd răspunde la un apel de rezervare. în aproape toate cazurile, agentul trebuie să consulte unul din fişierele, dealtfel excelent proiectate, în care să verifice dacă există spaţiu disponibil la zborurile pentru care este interesat clientul său. Un desen al poziţiei acestor fişiere şi al angajaţilor este prezentat în fig. 9.2. Cititorul va remarca, aşa cum a făcut-o şi dr. Wiley, eă în mod frecvent agenţii trebuie să-şi părăsească locurile pentru a consulta fişierele şi aceasta este o componentă importantă a timpului de servire.

în acest moment analistul nostru se retrage în biroul său pentru a analiza cele observate. Este clar că sistemul existent poate fi clasi-

ficat ca fiind de tipul Jf/Jf/5 : (oo/SIRO); deci un model care nu creează probleme deosebite şi care a fost foarte mult studiat‡‡‡‡‡. Care este sistemul propus ? în loc de un grup de zece linii cu cinci angajaţi, disponibili oricînd, vor fi cinci secţii, fiecare de tipul Jf/Jf/c : (Z/?); din punctul de vedere al analizei, un rol important îl joacă *c, L* şi

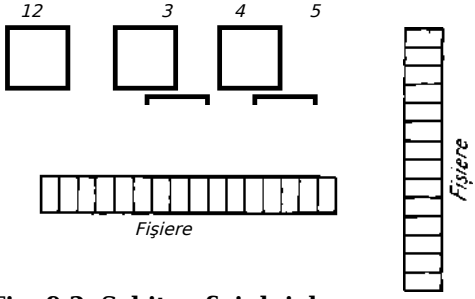


Fig. 9.2. Schiţa oficiului de rezervare.

regula încă nedeterminată a disciplinei de aşteptare. Nu se poate încă stabili nimic precis. Dr. Wiley mai face cîteva verificări asupra sistemului existent, utilizînd datele culese. Tabelul 9.1 prezintă cîteva date legate de timpii de aşteptare, înregistrate pe parcursul celor patru intervale de jumătate de oră în timpul perioadelor de aglomeraţie, atunci cînd frecvenţa apelurilor este de aproximativ unul pe minut. (Nu toate datele culese pot fi utilizate, deoarece frecvenţele medii de sosire sînt prea diferite între ele pentru a putea fi comparate.) Prima coloană a tabelului prezintă rezultatele unui model teoretic de tipul Jf/Jf/5 : (oo/SIRO). Corespondenţa este suficient de corectă şi ne putem imagina satisfacţia dr-lui Wiley în faţa obţinerii unei aproximări satisfăcătoare a realităţii.

Tabelul 9.1

---

‡‡‡‡‡ **Capacitatea sistemului poate fi considerată infinită şi nu doar 10, deoarece apelurile pot fi menţinute in tabloul de distribuire. Dacă L = 10, ar putea să apară unele dificultăţi.**

Timpi observaţi şi teoretici de aşteptare

Af/Af/5; ţoc/SIRO)	1 Intervalul 1	Intervalul 2	Intervalul 3	Intervalul 4
	1,30		**1,43**	**1,35**
	0,17 **1,10**	**1,80**		
***P(v>* 5 min)** **j**	**!**	**rezultate comasate**		
		0,13		

Analistul nostru consideră că acum poate să se gîndească la noua propunere. Dr. Wiley începe prin a culege mai multe date. (Atît conducătorii cît şi personalul de execuţie au întotdeauna o mare nedumerire asupra volumului mare de informaţii numerice, pe care îl necesită cercetarea operaţională.) Făcînd observaţii asupra liniilor telefonice, pe baza unui plan de culegere eşantionată a acestora, pe o perioadă de două săptămîni, el obţine următoarele rezultate privind apelurile telefonice relative la zona geografică a destinaţiei transportului solicitat :

1. Insulele britanice	17,0%
2. Nordul şi estul Europei	21,6%
3. Sudul Europei	28,6%
4. Orientul Apropiat	12,2%
5. Africa	26,6%

Zona 3 primeşte mai mult decît dublul comenzilor pentru zona 4. Dr. Wiley verifică apoi dacă acest aspect al repartizării procentuale a apelurilor pe zone de destinaţie este în concordanţă cu transporturile efectuate şi găseşte că este. Mai mult, el constată că repartizarea cererilor de transport spre diferite zone de destinaţie este aproximativ constantă în timpul perioadei de vîrf a verii şi de asemenea în timpul perioadei de vîrf premergătoare anului nou. Aceasta îi întăreşte convingerea că procentele determinate pentru numărul de apeluri aferente diferitelor zone de destinaţie sînt aplicabile şi perioadelor de vîrf ale anului. (Nu e nici o îndoială că această procedură are la bază presupuneri foarte „tari”, dar ce altceva poată să facă?)

Dr. Wiley mai face încă o verificare, căci este posibil ca procentele determinate să fie corecte în sensul mediei, dar numărul de apeluri pentru diferitele zone de aşteptare pot să atingă maximul la ore diferite în timpul zilei, astfel încît,

la un moment dat al zilei, pot fi mai multe apeluri pentru zona 4, decît pentru zona 3. Aceasta nu ar fi avut importanţă în vechiul sistem, dar va fi foarte important dacă va fi adoptat noul sistem. Analiza înregistrărilor făcute de el însuşi şi de asistentul său îi arată că deşi sînt oarecari neconcordanţe a momentelor de vîrf, rapartizarea procentuală obţinută pentru apelurile către diferite zone, relativă la perioadele de vîrf ale primelor cinci zile ale săptămînii, este în esenţă corectă. Dr. Wiley va putea face o serie de calcule numai dacă rezolvă problema disciplinei de aşteptare ce va exista în noul sistem. Directorul companiei ce răspunde de telecomunicaţii îi spune să se prevadă înlocuirea tabloului central de distribuţie cu unul automat. Un echipament automat va funcţiona pentru fiecare linie, şi nici un apel nu va mai putea fi menţinut în tabloul de distribuţie. Deci regula FIFO va determina disciplina de aşteptare. Dacă va fi menţinut centrul de rezervări, adică sistemul actual, el va dispune de o capacitate de 20, avînd cel mult zece linii telefonice. Dacă va fi adoptat noul sistem, atunci fiecare secţie va dispune de cinci. Dr. Wiley ştie că modelul cel mai apropiat pentru noul sistem ce a fost propus este, pentru fiecare din cele cinci zone, *M]M/c* : (5/FIFO). La un nivel al traficului de 3,7 erlangi, intrările în modelul Jf/Jf/5 : (20/FIFO) reprezentînd sistemul existent sînt de 3,7 erlangi, iar intrările pentru fiecare zonă propusă sînt respectiv 0,64; 0,80; 1,06; 0,45 şi 0,75 erlangi, corespunzînd procentelor de apeluri ce au fost stabilite. Se pot face comparaţii la acest nivel al traficului, deoarece acesta este o reprezentare rezonabilă a încărcării ce trebuie rezolvată; putem compara timpii medii de aşteptare, probabilităţile de pierdere şi probabilităţile ca un timp de aşteptare să depăşească un minut. Scopul constă în a calcua aceste cantităţi pentru sistemul actual cu cinci staţii de servire şi apoi de a determina necesarul de staţii de servire pentru diferitele zone ale sistemului propus, capabil să asigure aceeaşi calitate a serviciului.

Pentru modelul : (10/SIRO) nu există o formulă convena
bilă, astfel că Wiley va trebui să obţină rezultate prin simulare. Pentru modelul *M/M/S* : (20/FIFO) ca şi pentru

JH/M/c : (5/FIFO) există formula (4.6). Cu aceste mijloace el a obţinut rezultatele prezentate în tabelul 9.2.

în raportul prezentat, dr. Wiley scrie : „Reorganizarea propusă pentru sistemul de rezervare va conduce la un serviciu mult mai nesatisfăcător pentru clienţi. Pentru a egala actualul standard de servire, care este suficient de bun, vor fi necesari cel puţin doi salariaţi în fiecare zonă, în timpul orelor de aglomeraţie. Aceasta va însemna o creştere de 100% a personalului. Odată cu creşterea traficului, sistemul propus devine şi mai nesatisfăcător decît cel actual, căci creşterea numărului de angajaţi tinde să se facă cu multipli de 5 (numărul zonelor). Sistemul actual, cu toate telefoanele concentrate şi capabile să preia orice apel, admite o dezvoltare mai graduată odată cu creşterea traficului. Trabuie renunţat la ideea separării pe zone geografice şi trebuie reţinut din sistemul actual modul de

Tabelul 9.2

Comparaţie între sistemul existent şl cel nou

	Sistemul existent	Sistemul propus
Numărul de angajaţi	**5**	**11**
Procentul de apeluri ce găsesc toate liniile ocupate	**1,3**	**1,6**
Timpul mediu de aşteptare (min)	**1,1**	**1,2**
Procentul de apeluri ce aşteaptă mai mult de 1 min	**31**	**39**

grupare a telefoanelor. Dar pentru a face un sistem de rezervare mai eficient, este de dorit să se revadă modul de obţinere a informaţiilor de către angajaţi şi de asemenea modul de păstrare a informaţiilor”.

Raportul a fost prezentat. Argumentele sînt bine primite : cu toate că trebuie făcut ceva în organizarea sistemului de rezervare, centrul de rezervare este menţinut la fel cum a fost; ei bine, să zicem că aproape cum a fost.

Dr. Wiley, cu sentimentul că a făcut o treabă bună, pleacă de la şedinţă, de la Companie şi din această carte.

9.3.INTERLUDIU

Timpul trece şi au loc schimbări în sistemul de transport. Anterior departamentul era împărţit din punct de vedere funcţional în sectoarele : contabilitate, preţuri, documentaţie şi vamă-expediţie. Anumiţi angajaţi aveau sarcina de a ţine contabilitatea încasărilor, precum şi de a înregistra telefoanele prin care se cereau informaţii sau se anula vreo comandă. Această împărţire nu mai este acum valabilă. Departamentul de transport este împărţit acum în secţia de rezervări elefonice şi alte sectoare care se ocupă de preţuri, documentaţie, vamă^expediţie şi urmărirea transporturilor cu o anumită destinaţie. Pe lingă acestea, telefoanele prin care se solicită informaţii sînt preluate de către sectorul corespunzător zonei geografice respective.

Sistemul telefonic a fost de asemenea îmbunătăţit. Anterior, orice angajat putea să răspundă la orice apel telefonic ce solicita informaţii de orice fel (adică era un sistem de informare complet). Acum cele cinci perechi de circuite telefonice interne de la centrala aeroportului sînt repartizate la cele cinci sectoare. Clienţii permanenţi au fost sfătuiţi să ceară o anumită linie atunci cînd îşi rezervă locuri pentru o anumită destinaţie[§§§§§§].

De exemplu, dacă se solicită o rezervare pentru Geneva şi dacă una sau ambele linii care deservesc sectorul 3 nu sînt ocupate, se conectează direct pe legăturile 31 sau 32. Dacă ambele sînt ocupate, apelul telefonic este conectat la orice altă linie liberă.

Acest sistem s-a dovedit nesatisfăcător pentru departament, deoareee clienţii s-au plîns că secţia de rezervări telefonice funcţionează defectuos. Atunci s-a încercat să se amelioreze situaţia, rein- troducîndu-se angajaţi în fiecare sector care să se ocupe de rezervările telefonice. Directorul îl însărcinează pe dl. Staple să întreprindă o nouă anchetă.

---

§§§§§§ **Centrala automată reprezintă incă un proiect viitor.**

9.4. FAZA A DOUA

Din fericire Staple este un om cu vederi largi care verifică totul în practică. Cele zece linii telefonice din secţia de rezervări vor fi şi pe viitor înpărţite în cinci grupuri a cîte 2 linii, dar fiecare grup va recepţiona numai acele apeluri telefonice care sînt strict legate de activitatea sectorului respectiv. Telefoniştii de la centrală vor reţine acele apeluri care nu pot fi conectate la nici una din cele două linii corespunzătoare. în timpul orelor de vîrf, o colaboratoare va controla la întîmplare diferite linii pentru a vedea cum decurge activitatea. Telefoniştii de la centrală (care, deşi comentează, sînt mulţumiţi că participă la un proiect special) au fost de acord să numere apelurile telefonice dintr-o oră pentru fiecare sector. Dl. Staple a cronometrat şi el la întîmplare aceste apeluri.

Experienţa a durat două săptămîni, iar imensul volum de date strînse a fost analizat. Iată cîteva dintre rezultatele obţinute.

Din tabelul 9.3 rezultă că timpul mediu de servire al fiecărui apel telefonic este mai scăzut faţă de cel obţinut cu 12 luni înainte, dar diferenţa nu este semnificativă, la nivelul de 5%.

Tabelul 9.3

Comparaţie intre timpul de funcţionare şi cel de aşteptare

	Studiul I	**Studiul II**
Timpul mediu de servire al unui apel telefonic	**3,7**	**3,7**
Timpul mediu de aşteptare al unui apel telefonic	**1,35**	**1,58**

însă nu s-a mai răspuns la apelurile scurte care solicitau informaţii. Dl. Staple a tras concluzia în mod just că angajaţii, fiind specializaţi pentru o zonă geografică relativ restrînsă, pot să prelucreze mai repede apelurile telefonice

care solicită rezervări. Timpul mediu de aşteptare în orele de vîrf este mai mare decît era anterior, fapt datorat :

a) unui număr sporit de apeluri în timpul orelor de vîrf;

b) unei discrepanţe mai accentuate între procentele apelurilor corespunzătoare diverselor sectoare;

c) introducerii grupurilor cu acces limitat.

Este adevărat că numărul mediu al apelurilor telefonice care sosesc la centrală pe oră în timpul perioadelor de vîrf a crescut, atingînd circa 75 apeluri pe oră. Nu există nici un motiv să presupunem că repartiţia lor nu este Poisson.

Procentele apelurilor pentru diverse sectoare înregistrate în timpul experienţei au fost următoarele :

1) Insulele britanice	17% (17,0)
2) Europa de nord şi est	22% (21,6)
3) Europa de sud	29% (28,6)
4) Orientul Apropiat	12% (12,2)
5) Africa	20% (20,6)

Numerele din paranteze reprezintă rezultatele analizei

Aparent nu s-a produs nici o schimbare şi putem să tragem concluzia,
la fel ea dl. Staple, că principala cauză a deteriorării serviciului o reprezintă faptul că nu există un acces complet.

Adepţii teoriei aşteptării sînt satisfăcuţi, dar dl. Staple este impresionat de reducerea timpului de servire datorită specializării. Mai mult, el a mers mai departe decît dr. Wiley (care observase că angajaţii trebuiau să-şi irosească o parte din timp cu căutarea informaţiilor adecvate şi sugerase să se facă ceva în această direcţie) şi a efectuat măsurări care au arătat că pentru acele convorbiri telefonice care nu-i obligă pe angajaţi să îşi părăsească locul, timpul mediu de servire pentru un apel este de 2,3 minute faţă de 3,5 minute în general. Dl. Staple consideră că dacă rezervările pentru diferite zboruri s-ar face telefonic de către angajaţii împărţiţi pe sectoare, atunci informaţiile privind aceste sectoare pot fi păstrate în stative special amplasate între cele două posturi telefonice care pot recepţiona apelul telefonic. Ambii angajaţi pot ajunge cu uşurinţă la ele fără să-şi părăsească locul. El face o nouă paralelă, avînd în vedere trei sisteme posibile :

a) aceiaşi angajaţi se ocupă de rezervări şi de informaţii privind toate zonele geografice, avînd acces la toate liniile telefonice;

b) un grup de angajaţi se ocupă de rezervări pentru toate zonele geografice, informaţiile însă sînt date de angajaţi speciali în fiecare sector în parte;

c) rezervările şi informaţiile pentru fiecare sector sînt date separat de către angajaţii sectorului corespunzător.

Timpul mediu de servire care este luat în considerare în calcule este dat în tabelul 9.4.

Tabelul f>.4

Timpii de servire

Sistemul	1	(a)	(b)	(c)
Apeluri telefonice pentru rezervări		**3,5**	**3,5**	**2,3**
Apeluri telefonice pentru informaţii	**1 1**	**3,2**	**2,8**	**2,8**

Aceste date se bazează pe observaţii directe în cazul sistemelor (a) şi (b) şi pe o ipoteză suplimentară în cazul sistemului (c). Această ipoteză constă în faptul că buna cunoaştere : informaţiilor de către angajaţii care se ocupă de rezervări într-un anumit sector reduce durata medie a convorbirilor pentru rezervări la cea a apelurilor

telefonice pentru rezervări de care se ocupă un angajat în sistemul (a) atunci cînd acesta nu trebuie să-şi părăsească biroul (adică nu pierde timp să caute informaţiile cerute în altă parte).

Sistemul (a) are meritul că fiecare angajat poate răspunde la apelurile pentru orice zonă, dar presupune o risipă mai mare de timp din partea angajaţilor care trebuie să-şi părăsească locurile pentru a consulta informaţiile. Sistemul (c) impune funcţionarilor să-şi părăsească locurile mai puţin dar impune o diferenţiere mai mare a tipurilor de apeluri şi întîrzieri datorite transferului apelurilor dintr-un sector în altul. Acest fapt este important deoarece 21% dintre apelurile pentru rezervări includ tranzacţii multiple (doar 10 % în 1957). Sistemul (b) este un compromis. Pentru fiecare sistem a fost calculat (tabelul 9.5) numărul personalului necesar în timpul unei ore de vîrf pentru a asigura servirea clienţilor (măsurat cu timpul mediu de aşteptare de circa 1 min/apel). Sistemul (b) este mai puţin recomandabil şi alegerea se va face între sistemul (a) şi sistemul (c).

Concluziile doctorului Wiley au fost răsturnate deoarece este evident că cea mai bună soluţie este ca angajaţii care se ocupă de rezervări telefonice să fie amplasaţi în sectoarele respective; De fapt dl. Staple a folosit acelaşi model ca şi dr. Wiley, modelul clasic

Tabelul 9.5

Necesar de personal în orele de vîrf

Sistem	(a)	(b)	(c
1. Angajaţi care lucrează permanent (care nu se ocupă clecît de convorbirile telefonice)			
2. Angajaţi care lucrează		**Sectoarele 2, 3 : *2* Sectoarele 1, 4, 5 : *1* Total = 7**	**i Sectoarele 2. 3 : 2 Sectoarele } 1. 4, 5: 2**
3. Folosirea angajaţilor per- manenţi			
4. Folosirea angajaţilor pe timp limitat		**70%**	**38**

M/MIc: (oo/FIFO). Deosebirea a apărut deoarece dl. Staple şi-a dat seama că sistemul poate fi ameliorat inventînd un mijloc de reducere a timpului de servire, lucru evident dar, de cele mai multe ori, neglijat!

9.5. COMENTARIU

Atît Wiley cît şi Staple au dreptate şi se înşeală. Wiley a preferat (în mod just) metoda servirii pe mai multe canale specializării înguste, iar Staple a insistat corect asupra scurtării timpului de servire. Cititorul va lua în consideraţie ambele concluzii. Nu este foarte greu să se inventeze un sistem de vizualizare, sau bazat pe computere, care să permită funcţionarilor de la rezervări, care, se află într-o sală, să răspundă la toate întrebările şi să facă toate operaţiile de rezervare repede şi precis fără să-şi părăsească locurile. Această soluţie a fost adoptată pe scară largă acum, după mulţi ani, de către multe companii aeriene.

în limbajul capitolului 7, configuraţia optimă a timpului de aşteptare este influenţată de anumiţi factori — în acest caz, de timpul mediu de servire al apelurilor telefonice. Pentru o anumită valoare, soluţia lui Wiley a fost cea mai bună; pentru alta cea a lui Staple. Staple a făcut aproximări cam grosolane folosind tabelele lui Molina pentru Jf/3f/c : (oo/FIFO) pentru a deduce valorile aproximative din tabelul 9.5. Ar fi fost mai bine dacă ar fi fost folosite modelele *M/M/c :* (20/FIFO) şi Jf/Jf/e : (5/FIFO) ca mai bune ilustrări ale comportării viitoare a sistemului. Deşi rezultatele estimative ale oamenilor diferă, totuşi clasificarea celor trei sisteme posibile este aceeaşi.

Această concluzie a mai fost trasă în cap. 8.

10

METODE DE CONTROL AL CĂLĂTORILOR

Al doilea caz pe care-1 vom examina este sistemul de verificare a pasagerilor la aeroport. Majoritatea cititorilor cunosc sistemul de verificare, iar pentru cei care nu sînt familiarizaţi vom da o descriere a acestei operaţii.

Atunci cînd un pasager soseşte la aeroport să ia avionul, mai întîi trebuie să se prezinte la un ghişeu de verificare unde angajatul liniei aeriene, numit şi agent de pasageri, cîntăreşte bagajele călătorului, înregistrează rezultatul cîntăririi pe talonul de zbor al călătorului (acea parte a biletului care indică despre care zbor este vorba), etichetează bagajele călătorului, le trimite la camera de bagaje, îi dă călătorului contramarca bagajelor şi, în unele cazuri, îi ia cuponul de zbor şi îi dă în schimb un permis de trecere. După ce au fost îndeplinite toate aceste operaţii, călătorul este admis pentru zbor.

Cu excepţia aeroporturilor mici, în anumite perioade ale zilei verificarea călătorilor pentru mai multe zboruri se face în acelaşi timp şi compania aeriană trebuie să asigure mai multe ghişee care să servească pasagerii. Există numeroase moduri de a organiza aceste ghişee pentru a asigura o servire eficientă, însă majoritatea celor folosite în mod curent sînt amestecuri judicioase (mai mult sau mai puţin) a două tipuri extreme. Primul tip poate fi denumit sistem cu restricţie completă sau sistem de zbor. în această formă de organizare fiecărui zbor îi este distribuit un grup de ghişee (adesea unul singur). Toţi pasagerii pentru un anumit zbor trebuie să fie verificaţi la ghişeele special desemnate, care

nu se ocupă decît de pasagerii acestui zbor. Cel de-al doilea tip este cunoscut fie ca sistem liber, sau comun, sau ca sistem cu acces liber. în acest sistem fiecare pasager care soseşte poate să fie verificat la orice ghişeu al companiei aeriene.

Primul sistem are dezavantajul că pasagerii aşteaptă de regulă la un ghişeu în timp ce altul, repartizat pentru un alt zbor, este liber; se poate admite ca acest fenomen nu apare în cazul unui sistem cu acces liber. Lipsa principală a sistemului cu acces liber este că funcţionarul de la ghişeu nu ştie pentru ce zboruri stau la coadă pasagerii în faţa ghişeului său. Călătorul care vine tîrziu pentru un anume zbor poate sta la coadă după alţii care sînt verificaţi pentru zboruri ulterioare şi astfel poate întîrzia pînă la a pierde avionul; funcţionarul nu poate să anticipeze asemenea situaţii.

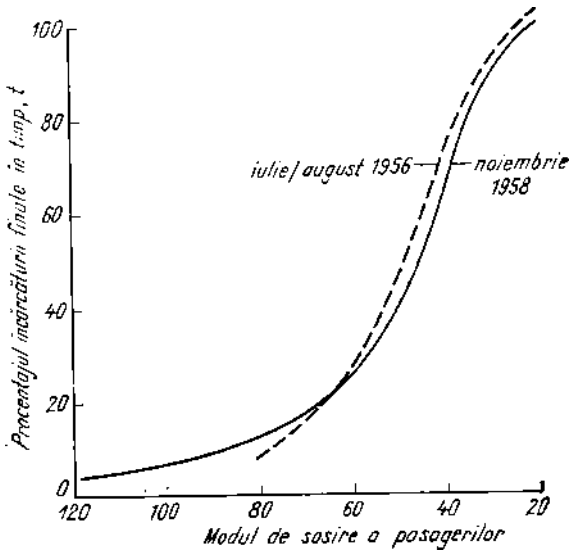
în anii 1950, în Anglia, liniile aeriene foloseau exclusiv metoda tradiţională de verificare şi nu aveau experienţă în ceea ce priveşte caracteristicile operaţionale ale sistemelor obişnuite. în 1955 s-a prevăzut că creşterea rapidă a traficului aerian şi introducerea iminentă a avioanelor mai mari face ca sistemul de verificare să fie neeconomic şi incomod, cel puţin pentru aeroporturile mari şi aglomerate.

10.1. PRIMA FAZĂ

în 1956 secţia de cercetări operaţionale a companiei BEA a întreprins un studiu asupra sistemului de verificare a călătorilor la aeroportul din Londra. Acest studiu avea un scop dublu : să stabilească în mod obiectiv cum funcţionează sistemul de verificare existent şi să-i stabilească perspectivele viitoare. Sistemul de verificare existent era un sistem de tip mixt. Toţi pasagerii care soseau să fie verificaţi cu mai mult de o oră înainte de plecare erau serviţi de către unul dintre cele două ghişee speciale de înregistrare. Pasagerii care soseau mai tîrziu erau verificaţi la celelalte ghişee. înregistrările amănunţite

ale momentelor sosirilor pasagerilor au arătat că aproximativ 30% din totalul călătorilor au fost verificaţi la ghişeele speciale de înregistrare. Figura 10.1 prezintă graficul sosirii călătorilor exprimat prin proporţia *F(z, t)* a călătorilor sosiţi în diferite momente pînă la ora închiderii (adică pînă la cel mai tîrziu moment posibil înainte de plecare) pentru verificare. După închidere nu se mai verifică nici un călător (zborul a fost „închis”).

Din fig. 10.1 reiese că 70% din călători au fost verificaţi la alte ghişee. De fapt călătorul care soseşte mai tîrziu decît cu o oră înainte de ora zborului său, dar cu 25 min înainte de zbor, poate să fie verificat la un ghişeu special purtînd numărul zborului său. (Cititorul va observa că compania aeriană, în dorinţa de a-şi satisface clienţii,



I-'ig. 10.1. Modul de sosire a pasagerilor.

verifică şi călătorii care sosesc mai tîrziu de ora închiderii ghişeului, adică cu 25 min înainte de zbor. Cu toate acestea, principiul rămîne în vigoare.) Figura 10.2 indică faptul că clienţii sosesc de obicei în grup organizat. Ca urmare, ca unitate de măsură a intrărilor s-a luat grupul de călători.

S-a examinat modul de intrare în sistemul de aşteptare la ghişeele speciale de înregistrare. Numerele grupurilor de călători care au sosit la interval de cinci minute pe parcursul celor două ore de vîrf ale celor cinci zile luate sub observaţie sînt prezentate în tabelul 10.1.

Din experienţă, este de aşteptat ca intrările să nu fie repartizate Poisson; în fond, au fost observaţi călători

provenind de la im număr fix de surse (zboruri) care nu au toate aceleaşi efecte. Cititorul trebuie

să-şi reprezinte în mod clar repartiţia totală obţinută prin suprapunerea mai multor modele de tipul indicat în fig. 10.1, cu momentele de „închidere” a zborurilor decalate cîteodată cu 5 şi alteori chiar

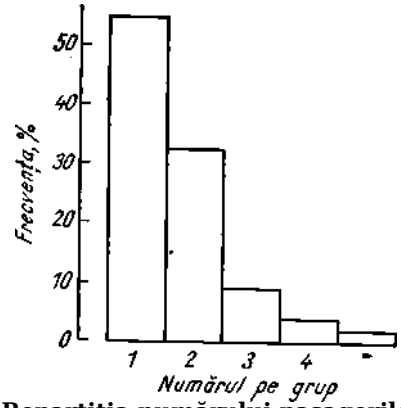


Fig. 10.2. Repartiţia numărului pasagerilor pe grup.

cu 10 minute unul de altul. Tabelul 10.1 indică faptul că totuşi ipoteza că intrările sînt repartizate Poisson nu este prea absurdă.

Evident, n-am avut un motiv pentru a face un test statistic de semnificaţie a acestor date, căci ştiam că sosirile nu pot fi în

Tabelul 10.1

Repartiţia numărului grupurilor de pasageri eare au sosit la interval de 5 mln la ghişeele speciale de înregistrare (ore de aglomeraţie);

îîr. grupurilor pe interval	Frecventa observată (%>	Repartiţia Poisson teoretică	Nr. grupurilor pe interval!	Frecventa observată (%)	Repartiţia Poisson teoretică
0	7	3,3	6	7	7,2
1	12	11,3	7	4	3,5
2	20	19,3	8	3	1,5
3	24	21,9	9	2	0,6
4	12	18,6	10	1	0,2
5	7	12,6	11	1	(0,05)

			Media	**3,4**	**3,4**

mod real repartizate Poisson. Altfel spus, repartiţia intrărilor, deşi nu este apriori Poisson, poate fi totuşi aproximată practic printr-o repartiţie Poisson.

A fost observată repartiţia timpului de servire la ghişeele speciale de înregistrare în timpul orelor de aglomeraţie (fig. 10.3). Nu poate

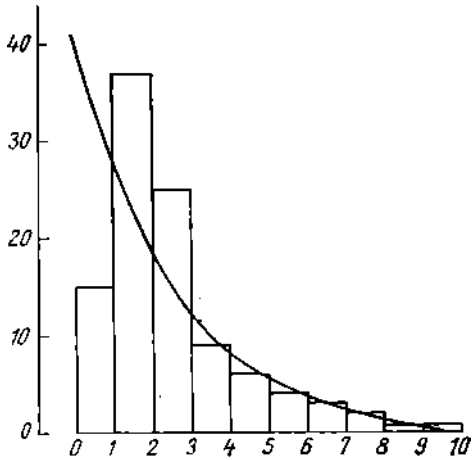


Fig. 10.3. Repartiţia timpului necesar **prelucrării grupurilor de pasageri.**

fi repartiţie exponenţială dar, pe de altă parte, repartiţia timpului de servire chiar şi în teoriile clasice privind traficul telefonic nu se asemăna prea mult cu repartiţia exponenţială. Grupul de cercetători a admis că repartiţia timpului de servire este exponenţială. Trebuie să se sublinieze faptul că repartiţia timpului de servire pentru ghişeele obişnuite de verificare a fost identică cu cea pentru ghişeele speciale de înregistrare. Aceasta nu este surprinzător, deoarece activitatea cerută pentru grupuri de pasageri este identică pentru ambele tipuri de ghişee. Figura 10.3 este compusă din suma datelor obţinute de la toate ghişeele. în acelaşi timp cu înregistrarea timpului de

servire şi a orelor de sosire a călătorilor, cercetătorii au înregistrat timpul de aşteptare al călătorilor la cele două ghişee speciale de înregistrare. Aceste observaţii au fost verificate şi în alte perioade, nu neapărat de aglomeraţie. Apoi, timpii de aşteptare înregistraţi, în perioade de 1/2 oră, au fost reprezentaţi grafic în raport cu utilizarea

funcţionarilor în aceleaşi perioade. Figura 10.4 prezintă aceste rezultate (cititorul îşi va aminti că u = 100 p, v. cap. 4). Sînt sigur că şi cititorii consideră aceste rezultate ca fiind încurajatoare. Observaţiile empirice sînt în concordanţă cu previziunile modelului teoretic Jf/JI/2 :(co/FIFO) şi cercetătorii au considerat, în mod just, că în analiza ulterioară toate ghişeele trebuie tratate ca şi cum ar fi un sistem cu mai multe staţii de servire în paralel, sistem ce poate fi studiat cu ajutorul modelelor de tipul *M/JH/c* : (co/FIFO). Această extrapolare îndrăzneaţă a experienţei s-a dovedit a fi greşită.

Sistemul de aşteptare la ghişeele obişnuite la care au fost serviţi călători în proporţie de 71% este foarte neobişnuit. Cercetătorii nu au considerat rentabil să-l analizeze folosind modele matematice. Observaţiile empirice şi experienţa dobîndită de ghişeele obişnuite au stabilit cîteva lucruri importante. Mai întîi, datorită ritmului variabil al sosirilor pasagerilor în timpul perioadei de verificare (de la 60 la 25 min înainte de momentul plecării), utilizarea unui singur funcţionar la un asemenea ghişeu a fost foarte variabilă (tabelul 10.2).

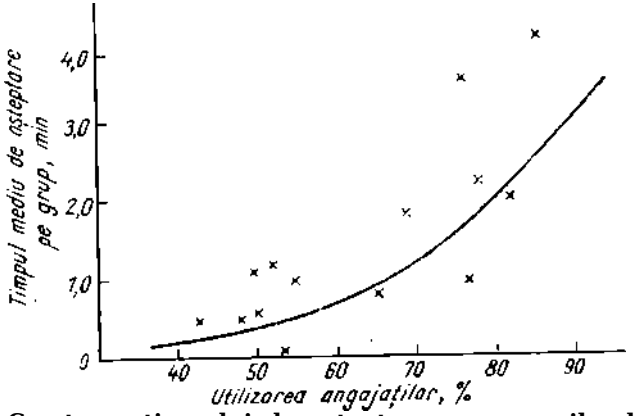
Tabelul 10.2

Utilizarea funcţionarilor la ghişeele de verificare

Perioada min înainte de plecare	***%)***
60 — 50	53
50-40	53
40-31	'6

în timpul perioadei de 40—31 minute înainte de plecarea cursei, de obicei este necesar ca un al doilea funcţionar să vină să ajute; cei mai experimentaţi funcţionari chemau automat în ajutor un asemenea auxiliar cu 45 min înainte de plecare pînă cu 25 min înainte de plecare (în timpul acestor ultime 5 min, 30—25 înainte de plecare, deşi erau puţine sosiri ale călătorilor, cele care se înregistrau erau foarte critice; în special în timpul ultimelor sosiri de după ora de închidere, al doilea funcţionar nu era deloc în plus).

Cu ajutorul acestor stratageme, funcţionarii de la ghişeele obişnuite de verificare au reuşit să menţină timpul de aşteptare al călătorilor la un nivel tolerabil, comparabil cu cel obţinut la ghişeele speciale



i-'ig. 10.4. Creşterea timpului de aşteptare a pasagerilor la ghişeele speciale de Înregistrare odată cu creşterea ocupării angajaţilor.

*** Observaţii efective se bazează pe medii calculate pe perioade de 1/2 ori - Curba datA de *M/M/2*; (co/FIFO).**

de înregistrare. Timpul mediu de aşteptare în orele de vîrf la ambele tipuri de ghişee varia între 1,2 şi 2,5 minute. S-a pus întrebarea : este această valoare satisfăcătoare ?. Conducerea companiei a considerat că nu şi s-a recomandat

ca standard de calitate ca timpul mediu de aşteptare în orele de aglomeraţie să fie de cel mult un minut.

O altă problemă care se pune : este posibil ca acest sistem să fie extins pentru a face faţă unui volum sporit de călători? Se părea că ghişeele speciale de înregistrare nu pun nici o problemă. Extinderea la trei sau patru va asigura acoperirea solicitărilor pentru următorii cinci ani*******.

Se estima dublarea numărului călătorilor între anii 1956 şi 1961. Unul din principalii factori care determină această creştere îl constituie introducerea avioanelor de capacitate sporită. Desigur, se estima că va creşte şi numărul zborurilor, dar nu cu mult, însă creşterea numărului de pasageri trebuia să aibă loc în special prin înlocuirea vechilor tipuri de avioane cu tipuri noi, de capacitate mult mai mare decît cele vechi. De exemplu, avioanele de tipul Vickers Van- guard au o capacitate dublă faţă de tipul mai vechi Viscount 701S. Acest lucru va influenţa considerabil situaţia la ghişeele obişnuite. Astfel, conform calculelor, cu 40—25 min înainte de plecarea avioanelor mari, vor fi necesari pînă la trei funcţionari pe zbor, iar cu 60—40 min înainte de zbor cîte doi, pentru a se evita aglomeraţia, lucru care a fost considerat inadmisibil.

Una dintre soluţiile propuse a fost de a scurta timpul de transfer de la ghişeele speciale, de la 60 min înainte de plecare la 40 min înainte de plecare, astfel incit ghişeele obişnuite să fie afectate doar cîte 15 min unui zbor. Examinîndu-se această soluţie, s-a constatat că se poate economisi timp dirijîndu-se cît mai mulţi călători spre ghişeele speciale de înregistrare. în acest scop s-au folosit ca modele Jf/Jf/5 : (oo/FIFO) pentru ghişeele speciale şi Jf/Jf/2 : (oo/FIFO) pentru perechile de ghişee obişnuite. Ultimul model este evident foarte grosolan.

înainte ca acest sistem să poată fi pus în practică trebuiau să se rezolve cîteva probleme de funcţionare. Deoarece sistemul de verificare existent nu presupunea mai mult de doi angajaţi — sau ghişee — pentru fiecare zbor, nu a existat o problemă a controlului. Angajatul (angajaţii) putea(u) să verifice pasagerii urmărind lista, obţinîndu-se un control strict al numărului şi identităţii acestora. Este clar

******* **Compania BEA era inlr-o perioadă de dezvoltare rapidă.**

că în cazul noului sistem apare necesitatea confruntării biletului intr-un punct central pentru toţi pasagerii unui zbor, deoarece un număr mai mare de angajaţi nu poate utiliza aceeaşi listă, iar identitatea moment cu moment a mai multor liste este greu de realizat. Transferul biletelor de zbor intr-un punct central de control pe o bandă transportoare sau prin poştă pneumatică generează un alt şir de aşteptare la camera de control, unde biletele ar mai trebui să fie sortate în funcţie de destinaţia zborului.

Centrul de control ar trebui să îndeplinească deci următoarele funcţii: să sorteze biletele după indicativul zborului pe măsură se acestea sosesc pe bandă de la ghişeele obişnuite; să ia fiecare set ie bilete la închiderea zborului respectiv, să adune greutatea bagajelor şi să stabilească numărul pasagerilor, să comunice aceste date secţiei de control al încărcăturii, să verifice biletele după lista pasagerilor şi să observe neconcordanţele (pasageri care nu s-au prezentat, alţi pasageri suplimentari etc.); cînd este necesar, să expedieze datele care prezintă interes la aeroportul de destinaţie. Unele dintre aceste operaţii erau efectuate de secţia de control, iar în sistemele de verificare existente nu erau necesară sortarea (biletele erau deja clasificate), adunarea greutăţii bagajelor era făcută de către funcţionarii delaghişee, iar verificarea biletelor pe baza listei pasagerilor la fel.

Trebuia să se evalueze mîna de lucru necesară pentru îndeplinirea tuturor acestor operaţii în noul centru de control. Astfel, a fost stabilit timpul mediu de servire care va rezulta pentru ghişeele obişnuite dacă o parte din aceste operaţii vor fi transferate spre centrul de control. S-a prevăzut că va fi în medie de 1,6 minute pentru un grup de călători şi s-a convenit ca repartiţia sa să fie considerată exponenţială. De asemenea s-a calculat numărul de angajaţi necesari în centrul de control, sintetizîndu-se şi calculîndu-se volumul total de muncă, aplicîndu-se un factor de utilizare. S-a apreciat că în centrul de control este nevoie de *n* persoane, unde *n* a fost calculat după cum urmează:

n = 2 + 0,2 x (numărul funcţionarilor de la ghişeele obişnuite) (10.1)

Fină acum studiul s-a bazat pe fapte. Următoarea

problemă pusă ţinea mai mult de imaginaţie : ce fel de disciplină a aşteptării se va obţine în cazul unui sistem de verificare obişnuit ? Răspunsul era greu de dat. După cum vă amintiţi, cele două ghişee speciale de verificare au funcţionat ca şi cum s-ar fi aplicat regula FIFO. Părea valabil ca pasagerii să se răspîndească la ghişee, deplasîndu-se liber de la unul la altul, pentru a-şi reduce timpul de aşteptare. Deşi nu se respectă strict disciplina clasică de aşteptare FIFO: clienţii sînt serviţi în ordinea sosirii lor, totuşi s-a apreciat că se întîmplă aproximativ acest lucru. Standardul de servire luat drept bază de calcul era un timp mediu de aşteptare care nu este influenţat de disciplina de aşteptare în modelele particulare cu mai multe staţii de servire care păreau că aproximează sistemul real de verificare ; cercetătorii au fost de acord să admită regula FIFO ca regulă a disciplinei de aşteptare.

Astfel, ca model pentru sistemul de verificare la ghişeele obişnuite a fost stabilit *M/M/c* : (oo/FIFO) cu p. = 0,625 şi X (în orele de aglomeraţie) iniţial 3,1 pe minut, momentul de transfer fiind cu 40 min înainte de plecare. Graficele lui Molina arată că pentru a ajunge la un timp mediu de aşteptare de 1,0 min în aceste condiţii, numărul de angajaţi trebuie să fie c = 6. în mod similar, c poate fi calculat pentru alte valori ale lui X care corespund altor ore ale zilei.

Numărul ghişeelor de zbor, numite „ghişee finale de verificare", a fost stabilit pentru fiecare oră, determinîndu-se numărul de zboruri maxim care pleacă în timpul fiecărui interval de 15 min (fiecare ghişeu final trebuie să fie deschis timp de 15 min) şi repartizîndu-se un angajat dacă avionul este de tipul DC—3, 1,5 pentru un avion de tipul Elisabethan sau Viscount, 2 pentru avion de tipul DC—6B. Astfel a fost calculat numărul personalului de control.

Necesarul de angajaţi şi ghişee astfel calculat a fost ceva mai mic decît cel necesar pentru sistemul vechi de verificare a zborurilor ; şi astfel personalul a început să fie sigur că se va adopta noul sistem de verificare cît mai curînd posibil.

în acest punct al studiului s-a întîmplat ca cinci membri ai personalului de verificare să se îmbolnăvească cam în acelaşi timp într-o perioadă foarte aglomerată a anului.

Supraveghetorii au fost de acord că este imposibil să se prelucreze fluxul de călători cu vechiul sistem de verificare, fără personal suficient, şi au hotărît să încerce noul sistem de verificare : un sistem fără ghişee finale. Principalele probleme ce apăreau au fost următoarele : timpul era prea scurt pentru instruirea personalului rămas şi lipsea un sistem de transport al taloanelor într-un punct central de control şi sortare; ultima problemă a fost rezolvată ad-hoc, folosindu-se drept curieri angajaţii tineri care duceau taloanele la centrul de control format în grabă.

Noul sistem de verificare şi prototip au intrat în funcţiune cu două zile înainte de un week-end aglomerat specific englezesc. La început totul a decurs conform planului, dar pe măsură ce a crescut traficul, au apărut deficienţe în serie. Timpul de aşteptare al clienţilor era cu mult mai mare decît cel anticipat. Principala problemă privea influenţa sistemului asupra punctualităţii plecării avioanelor. Mulţi pasageri care soseau cu 5 — 6 min înainte de închiderea zborului nu aveau timp să ajungă la ghişee în timp util. Pe bună dreptate aceştia reclamau, blocînd ghişeele şi întîrziindu-i şi pe pasagerii din spatele lor, astfel ajungîndu-se la întîrzierea plecării mult mai multor zboruri decît în mod obişnuit. Apariţia acestor blocări a fost observată de aproximativ 20 de ori, din care una a durat chiar 18 min. în a patra zi a experienţei, supraveghetorii au iniţiat anunţarea pasagerilor cu cinci min înainte de momentul de închidere a fiecărui zbor, astfel încît cei care nu au fost verificaţi încă să treacă imediat în faţă, cerînd prioritate de servire. Această măsură nu a avut rezultate semnificative pentru că englezii, care sînt foarte disciplinaţi, nu au vrut să treacă în faţa altora, şi în cazul în care au făcut-o s-a produs dezordine : călcîiul lui Ahile s-a dovedit a fi problema bagajelor.

Importanţa acestui experiment rezidă în faptul că a scos la iveală problema călătorilor care sosesc tîrziu şi a celor cu probleme speciale. De asemenea s-a stabilit că momentul la care trebuie să se fi încheiat verificarea ultimului pasager (momentul de completare a zborului) nu trebuie să depăşească cu cinci min momentul de închidere, altfel în 25% din cazuri plecările avioanelor vor fi întîrziate.

Cheltuielile şi neajunsurile provocate de aceste plecări întîrziate companiei aeriene sînt aşa de mari încît conducerea acestor companii nu acceptă sisteme de verificare care pot să le favorizeze. în acelaşi timp, conducerea (care a fost informată despre gradul de aglomeraţie constatat în orele de vîrf) a fost de acord să îmbunătăţească standardul de servire la ghişeele obişnuite; de acum înainte, timpul mediu de aşteptare al călătorilor va trebui să fie cel mult 30 s în orele de aglomeraţie.

în acest moment era necesar să se redefinească problema sistemului de verificare optim. Acest sistem va fi cel care va necesita numărul minim de salariaţi astfel încît: 1) să se asigure un timp mediu de aşteptare de 0,5 min în orele de vîrf; 2) să se asigure ca cel mult pentru un zbor din 20 momentul de completare să fie cu 5 min mai tîrziu decît momentul de închidere. în aceste condiţii stabilirea unui sistem de verificare optim este acelaşi lucru cu stabilirea timpului de transfer optim pentru un sistem compus. Aceasta a reprezentat baza pentru o nouă serie de studii.

10.2. FAZA A DOUA

Cercetătorii care au întreprins această a doua serie de studii aveau experienţă mai multă şi erau mai multilaterali. Ei au întreprins o examinare metodică a celor patru componente ale unui sistem de verificare compus :

1. Verificarea pasagerilor la ghişeele obişnuite. Aceasta cuprinde : cîntărirea şi etichetarea bagajelor, înscrierea greutăţii bagajelor pe taloanele de zbor, întocmirea unor chitanţe pentru eventuale plăţi suplimentare, emiterea de permise de trecere şi transmiterea taloanelor de zbor spre camera de control.

2. Verificarea călătorilor la ghişeele finale cuprinde toate operaţiile îndeplinite la un ghişeu obişnuit, plus totalizarea numărului de călători, plus a greutăţii bagajelor, împreună cu alte cîteva operaţii minore.

3. Sortarea taloanelor care sosesc pe bandă de la

ghişeele obişnuite, in funcţie de indicativul zborului.
4. Controlul, adunarea şi tipărirea în mod automat a numărului călătorilor şi greutăţii bagajelor acestora, confruntarea taloanelor cu listele de călători etc.

Cercetătorii au hotărît să studieze acest proces complex în anumite condiţii specifice de trafic şi anume:
1. în timpul unei ore de aglomeraţie se va programa ca plecarea zborurilor să aibă loc din cinci în cinci minute.
2. Pentru fiecare zbor în parte, 20 de grupuri de pasageri vor sosi înainte de momentul de închidere care este cu 25 minute înainte de momentul plecării.

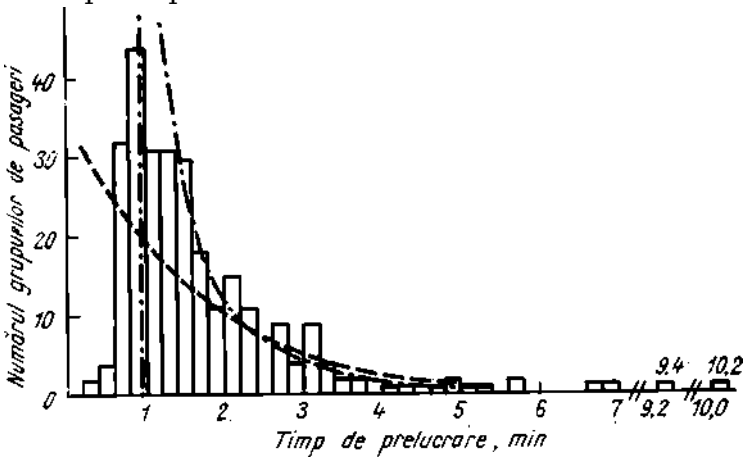
Trebuie remarcat faptul că numărul de pasageri dintr-un grup variază, după cum se indică şi în fig. 10.2, şi că verificarea pentru zbor nu se face numai la aeroport, deoarece unii pasageri preferă să fie verificaţi la sediul din oraş.

10.2.1. VERIFICAREA LA GHIŞEELE COMUNE

Modelul *MIM Ic* : (oo/FIFO) al sistemului de aşteptare la ghişeele obişnuite nu a fost infirmat în practică. Totuşi, în timpul care s-a scurs de la studiile iniţiale, la un alt aeroport englez a intrat în funcţiune un sistem compus. Din nefericire, proiectul conceptual şi fizic al acestui sistem a fost atît de particular, încît experienţa dobîndită aici nu a putut fi extinsă, cu o singură excepţie, anume repartiţia timpului de servire. Activităţile executate la un ghişeu obişnuit la aeroport erau identice cu cele executate la aeroportul din Londra. Ca urmare repartiţia prezentată în fig. 10.5 a înlocuit repartiţia teoretică folosită anterior.

Dificultatea pe care o pune această repartiţie constă în faptul că se ştia prea puţin despre modelele de aşteptare cu mai multe staţii de servire avînd repartiţii ale timpului de servire de tip Pearson III. Cercetătorii, cel puţin în Anglia, sînt tentaţi să facă următorul raţionament. în cazul unui sistem cu o singură staţie de servire ştim că timpul mediu de aşteptare produs de o repartiţie a timpului de servire

de tip exponenţial negativă este mai mare decît cel produs prin repartiţii de dispersii mai mici, toate celelalte condiţii fiind aceleaşi. Formula lui Pollaczek asigură aceasta. Este logic să se presupună că



l-'ig. 10.5. Repartiţia timpilor de verificare la ghişeele obişnuite. Dreptunghiurile reprezintă repartiţia observată.
Curba de tip Peareon III.
- — - - Curba exponenţială negativă.

lucrurile se întîmplă la fel şi în cazul mai multor staţii de servire. Dacă calculăm totul ca şi cum timpul de servire ar fi exponenţial, acţionăm cu prudenţă şi conservatorism.

Un membru al echipei de cercetători englezi a construit o simulare modestă şi a făcut-o să funcţioneze manual (nu avea la dispoziţie un calculator) pentru a stabili timpul mediu de aşteptare care corespunde timpului de servire observat. El a comparat aceste rezultate cu cele obţinute din modelul *M/M/c* :(oo/FIFO) cu ajutorul tabelelor lui Molina. Comparaţia s-a dovedit a fi atît de interesantă, îneît rezultatele ulterioare au fost calculate, folosind diferitele repartiţii Pearson III ale timpului de servire care au fost observate. Concluzia a fost că rezultatele foarte bune se pot obţine repede calculîndu-se timpul mediu de aşteptare pentru *c* staţii de servire, fără a recurge la simulare, după

formula

$$(1 + D^2), \qquad (10.2$$

unde J/[Ic)]este timpul mediu de aşteptare în cazul c staţii de servire dacă repartiţia timpului de servire ar fi exponenţială negativă cu aceeaşi medie, şi *D* este dispersia repartiţiei Pearson de tipul III, Această formulă a fost iniţial obţinută de Pollaczek pentru cazul unei singure staţii de servire (c = 1). Concluzia la care s-a ajuns are o mare valoare deoarece este uşor de calculat *M[ic}* din formula lui Erlang

$$c \bullet c\,!(1 - \qquad (10.3$$

unde 1/p. este timpul mediu de servire iar

$$\_i = \text{'j,}^{1}\ \frac{(cp)^{r}}{} + \frac{(cp)^{c}\ 1}{}\ P(0) \qquad r!\ c! \quad 1 - \qquad (10.4$$

p ’

după cum cititorul îşi aminteşte din cap. 3.

David Owen a sugerat o aproximare a timpului mediu de aşteptare pentru un model din familia :(oo/FIFO). în tabelul 10.3 sînt comparate rezultatele obţinute, folosindu-se această formulă de aproximaţie cu cele obţinute prin simularea Monte Carlo. Cele două serii de rezultate sînt în concordanţă. Este clar că pentru repartiţiile Pearson III ale timpului de servire care se întîlnesc în practică în sistemele de verificare (pentru care de obicei 0,70 < < *D* < 1,0) decizia de a se asigura *c* sau *c* + 1 staţii de servire pe baza formulei lui Erlang corectată cu — (1 + Z>[2]) este suficient de 2
corectă.

Această metodă de aproximaţie a rezolvat principala dificultate a calculelor şi s-a putut calcula numărul ghişeelor, adică al staţiilor de servire necesare unui sistem compus de verificare pentru a prelucra fluxuri diferite de pasageri, asigurînd o servire standard echivalentă cu un timp mediu de aşteptare de pasager de 0,5 min în orele de vîrf.

Cercetătorii au formalizat apoi estimaţia ritmului mediu de sosire a grupurilor de călători la ghişeele obişnuite. Presupunînd că sînt programate să plece în fiecare oră *k*

zboruri la intervale de 60/fc min, ritmul mediu de sosire trebuie să fie

$$\underline{F(g_0, t)} \qquad (10.5$$

unde «$_0$ este momentul de transfer şi *n,* numărul grupurilor de pasageri cu al i-lea zbor. *F(z,* t) este proporţia cumulată a sosirilor cu *z* minute înainte de închiderea zborului, care are loc cu *t* minute înainte

Tabelul 10.3

Comparaţie între diferite evaluări ale timpului mediu de aşteptare

Nr. de rtatll de servire	Cazul A		Cazul B		Cazul C	
	6 = 2.50 Formula de aproximare	-0 = 0,75 Simul	6 = 1.54 Formula de aproximare	P = 0.85 Simulare	6=1.59 Formula de aproximare	0=0.96 Simulare
7	—	—	2,59	2,25	1,70	1,64
8	—	—	0,48	(0,27)	0,40	(0,51)
9	—	—	0,17	0,15	0,17	0,12
10	21,80	(8,4)	0,07	0,07	0,06	0,05
11	1,09	0,92	0,03	0,04	0,03	0,03
12	0,58	0,45	—	—	—	—
13	0,16	0,16	—	—	—	—
14	0,07	0,07	—	—	—	—

de închiderea zborului, care are loc cu *t* minute înainte de plecarea avionului.

Pentru valorile particulare date parametrilor modelului examinat, numărul ghişeelor de verificare necesare, corespunzătoare diferitelor momente de transfer, a fost găsit ca în tabelul 10.4.

Tabelul 10. I

Numărul angajaţilor necesari pentru ghişeele de verificare primite

Timp de transfer Înainte de Închidere, In min	i 5	10	15	20	25	30
c	! 8	8	8	7	6	5

La ghişeele de verificare obişnuite condiţiile legate de momentul completării unui zbor nu sînt importante decît dacă $z_0 - t = 0$ (adică dacă nu există ghişee finale) sau dacă probabilitatea ca un pasager să aştepte mai mult de $z_0 - t$ este considerabilă. O altă restricţie de care trebuie să se

ţină seama : riscul ca un pasager care a sosit înainte de închiderea zborului să ajungă prea tîrziu la ghişeu.

Reformulînd aceste două observaţii prin luarea în consideraţie a unor limitări ale riscului, ele sună astfel:

1. Riscul ca un pasager care a sosit înainte de momentul de transfer să nu poată fi verificat înainte de închidere trebuie să fie atît de mic, încît să apară în cel mult 1 din 20 de zboruri.
2. Situaţia unei verificări a unui pasager începută înainte de închidere şi care nu s-a terminat după 5 min de la închidere trebuie să apară în cel mult 1 din 20 de zboruri.

Examinînd prima restricţie, s-a constatat că calculul riscului situaţiilor de acest tip implică cunoaşterea repartiţiei timpului de aşteptare. Pe cînd utilizarea modelului Jf/Jf/c :(oo/FIFO) apare justificată pentru calculul timpului mediu de aşteptare mai ales după corecţiile realizate folosindu-se ipoteza lui Owen, cercetătorii nu au avut tot atîta încredere că se vor obţine estimaţii corecte ale probabilităţilor asociate părţii superioare a repartiţiei timpului de aşteptare. Această dificultate a fost greu de rezolvat, deoarece se părea că nu era nici un mod de a se deduce repartiţia timpului de aşteptare pentru un model mai realist.

Simulările Monte Carlo făcute pentru un sistem obişnuit complet cu $z_0 - t = 0$ au generat totuşi repartiţii ale timpului de aşteptare, care sînt prezentate în fig. 10.6 pentru diverse numere de ghişee obişnuite. Este evident că într-un sistem compus în care momentul de transfer este z_0, probabilitatea $q\{z_0,$ c; v) a unui timp de aşteptare ce este mai mare decît v în condiţiile în care există c angajaţi, trebuie să satisfacă condiţia

$$c; v) < q(t, c ; v),$$

unde t, ca de obicei, este momentul de închidere. Probabilitatea ca un pasager să sosească în intervalul (u, u + du) este să spunem $p(u)du$; astfel încît probabilitatea necondiţionată ca el să sosească înainte de z_0 şi să nu ajungă în poziţia de a fi verificat pînă după momentul t este

$$Q(\text{«o, c}) = \int_{0}^{z_0} p(u)\, q(z_0,\ c\ ;\ u - t)\, du <$$

$$\int_{0}^{\infty} p(u)\, q(t,\ c\text{-},u - t)\, du = Q'(z_0,\ c).$$

Probabilitatea ca cel puţin un grup de pasageri pe zbor să sosească înainte de momentul de transfer şi să nu ajungă în situaţia de a fi verificat decît după acest moment este mai mare decît

$$\{1 - [1 - <2'(z_o, e)]2O\}. \qquad (10.6)$$

Este uşor de arătat, folosindu-se repartiţiile timpului de aşteptare din fig. 10.6, că dacă această expresie ar fi mai mică decît 0,05, atunci

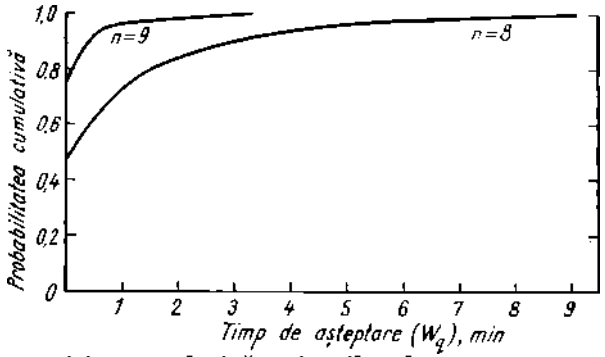


Fig. 10.6. Repartiţia cumulativă a timpilor de aşteptare pentru sisteme obişnuite complete de verificare (c_0 = f).

$z_0 - t$ trebuie să fie de cel puţin 7 min pentru 8 ghişee şi de cel puţin 2 min pentru 9 ghişee.

A doua condiţie a pus dificultăţi de calcul similare, care au fost rezolvate într-un mod analog. Pentru ca această condiţie să fie îndeplinită, s-a stabilit că momentul de transfer trebuie să fie cu cel puţin 2,6 min înainte de închidere. Rezultatele acestor calcule sînt :

1. Momentul de transfer nu va fi mai devreme de 3,6 min

înainte de închidere.

2. Pentru un moment de transfer cuprins între 3,6 şi 7 min înainte de închidere, sînt necesare 9 ghişee.

3. Pentru momente de transfer situate mai devreme decît cu 7 min înainte de închidere numărul ghişeelor obişnuite este cel arătat în tabelul 10.4.

10.2.2. FUNCŢIILE CAMEREI DE CONTROL ŞI SORTARE

Cititorul îşi va aminti că în primul studiu, o regulă simplă bazată pe amestecarea şi gruparea elementelor de timp de către un inginer a fost folosită pentru a se calcula raportul dintre personalul centrului de control şi cel de la ghişeele de verificare. în timpul experimentului sortarea tichetelor şi verificarea concordanţei lor cu listele de călători s-a dovedit a fi o problemă serioasă. Acest fapt a sugerat că procesul sortării trebuie să fie examinat mai amănunţit. Mai mult, în primul studiu s-a presupus că operaţia de înregistrare a datelor va fi executată manual şi că toate operaţiile înrudite necesită un angajat pentru fiecare trei ghişee obişnuite. în perioada dintre primul studiu şi experiment, unul dintre analiştii companiei a întreprins un studiu amănunţit al înregistrării datelor şi al proceselor înrudite şi ca rezultat a dezvoltat un nou procedeu de executare simultană a tuturor operaţiilor aritmetice de trei ori mai repede şi cu precizie sporită. Principala inovaţie care a făcut acest lucru posibil o reprezintă o modificare specială a unei maşini comerciale de înregistrat. Pentru a se aprecia avantajele acestei maşini, cercetătorii împreună cu analistul în cauză au făcut o serie de experienţe cu o machetă a camerei de control folosind un prototip al noii maşini de înregistrare.

Procedeul de sortare a tichetelor are o serie de caracteristici interesante şi de aceea îl vom examina îndeaproape în următorul capitol al acestei cărţi. Viteza cu care erau sortate tichetele a fost calculată după cum urmează. S-au folosit tipuri de stative pentru taloane, prevăzute să fie folosite în viitor. S-a făcut o experienţă pentru a se stabili timpul cheltuit pentru a se sorta 160 taloane spre 16 destinaţii; factorii au fost : caracterul angajaţilor ce verifică pasagerii (trei tipuri), tipurile de stativ pentru taloane (patru) şi tipurile de zile (trei). Cel mai

bun sistem de sortare a avut un timp mediu de sortare de 2,Is pentru un talon, cu un coeficient de variaţie mai mic de 5%.

Intrările in poziţia de sortară au fost considerate de tip Poisson şi viteza medie a sosirilor tichetelor a fost 1,5/a pe minut, unde 1,5 este valoarea medie a taloanelor pe grup de călători, iar *a* este timpul mediu dintre sosirile grupurilor de pasageri la ghişeele obişnuite, definit pentru diferite momente de transfer ca fiind

$$\left[\frac{F(z_0, t)}{60} \sum_{i=1}^{k} n_i\right]^{-1}.$$

Era clar că chiar dacă toate operaţiile de verificare ar fi fost îndeplinite la ghişeele obişnuite, astfel încît solicitarea în poziţia de sortare ar fi maximă, traficul (exprimat în erlangi) ar fi de numai

$$\frac{360 \text{ X2}^{\wedge}}{2600} = 0{,}21$$

şi întîrzierea în sortarea tichetelor ar fi mică chiar dacă nu s-ar ocupa de sortare decît un singur angajat.

Timpul necesar pentru înregistrarea a *n* pasageri şi a bagajelor acestora, înscrierea greutăţilor bagajelor şi transmiterea totalurilor la secţia de control a încărcăturii a fost calculat în mod similar şi avea o medie de 0,5n + 4,5 min cu foarte mici abateri.

Intrările în procedeul de înregistrare au fost regulate şi la momentul de închidere pentru fiecare zbor trebuia să fie efectuată o totali- zare. Regularitatea intrărilor, precum şi limita superioară a timpului de servire de 6 min pe zbor (corespunzînd verificării a 30 de pasageri) au arătat că este nevoie de cel mult doi angajaţi pentru această operaţie. Fiecare dintre ei se va ocupa de cîte un zbor şi vor prelucra zboruri alternative. Un singur funcţionar ar fi de ajuns dacă momentul de transfer ar fi întotdeauna cu mult înainte de momentul închiderii. Numărul mediu al taloanelor pe un zbor, pentru un moment de transfer z_0 a fost de $3OF(z_o, t)$, să zicem $3OF_o$. Aşadar, timpul mediu de totalizare a fost

$$(0,05)\ (3OF_o) + 4,5 = 1,5F_O + 4,5 \text{ min.}$$

Pentru ca această expresie să fie mai mică de 5 min este clar că $F_o < 0,3$ şi astfel $z_0 - t$ nu trebuie să fie mai mic de 46 min, după cum se arată în fig. 10.1. Totuşi, deoarece numărul pasagerilor care trebuiau serviţi pe zbor avea o rejfartiţie binomială, timpul de totalizare poate să varieze şi momentul de transfer la 46 min înainte de închidere ar putea produce cozi excesiv de lungi în orele de aglomeraţie.

Volumul de interferenţă asociat unei probabilităţi de 0,05 ca timpul de totalizare să depăşească 5 min apare acceptabil pentru scopuri practice. Prin urmare, z_0 a trebuit să fie stabilit astfel încît

$$P\ \{1,5\ 1*0 > 0,5\}\ \ 0,05.$$

Aceasta este acelaşi lucru cu aflarea celei mai mari valori a lui p care satisface relaţia în care apare o funcţie beta incompletă :

$$\text{IpţlO, 21) < 0,05.}$$

Consultîndu-se tabelele funcţiei beta incomplete întocmite de Pearson, se constată că p nu trebuie să fie mai mare decît aproximativ 0,193. Aşadar, din fig. 10.1 rezultă că ($z_0 - t$) trebuie să fie mai mare de 52 min. Astfel sînt necesari doi angajaţi pentru înregistrare şi control cu excepţia momentelor de transfer cu cel puţin 52 min înainte de închidere, in care caz unul singur este suficient. în plus, este necesar cel puţin un angajat pentru a face confruntarea bagajelor chiar dacă nu sînt deloc ghişee obişnuite.

în acest moment cercetătorii au putut calcula numărul total al angajaţilor neceari pentru secţia ghişeelor obişnuite de verificare ale unui sistem compus de verificare, corespunzător diferitelor momente de transfer. Rezultatele sînt date în tabelul 10.5.

Tabelul 10.5

Numărul angajaţilor necesari la secţia ghişeelor obişnuite a sistemului de verificare

— *t* in min	j 0	5	10	15	20	40	60
Nr. de angajaţi	12	11	11	11	10	6	4

Sistemul de ghişee finale de verificare a zborurilor este diferit de tipurile studiate în general în teoria aşteptării. în primul rînd, intrările sînt neobişnuite. Examinarea înregistrărilor individuale colectate în timpul studiilor anterioare a arătat că numărul grupurilor de pasageri, *r,* care sînt verificate la un ghişeu final, peste cele 20 de grupuri pe zbor prevăzute iniţial, va avea o repartiţie binomială *b* (r, 20; 1 — F_o) = (^{20} j (1 - F_0)^r im

unde $F_o = F(z_0, t)$. Totuşi, în orice caz numărul sosirilor posibile este strict limitat. Pe lingă această particularitate, este clar că orice sistem de aşteptare la un ghişeu final de verificare începe ca şi cum nu ar fi şir de aşteptare în momentul z_0. Durata sa exprimată în numărul grupurilor de pasageri serviţi va fi foarte scurtă, astfel încît se poate cu greu presupune că se ajunge în starea de echilibru statistic. Cercetătorii au hotărît că singurul mod posibil de a trata acest sistem este de a-1 simula.

Modelul sistemului de aşteptare la ghişeele limitate de verificare a fost studiat şi el prin simulare. S-a încercat să se obţină soluţii de tranziţie prin mijloace pur matematice, dar această sarcină s-a dovedit a fi peste posibilităţile echipei de cercetare. S-au efectuat 100 de serii de simulări în condiţii diferie şi fiecare combinaţie de condiţii a fost reprodusă de cel puţin 10 ori. Simulările s-au făcut ţinînd seamă de condiţiile :

1) $z_0 — t < 60$ min şi în plus ghişeul limitat se deschide la momentul z_0 şi se închide la momentul *t;*

2) numărul pasagerilor verificaţi la ghişeul limitat are repartiţia binomială *b(r,* 20, 1 — F_o*);*

3) numărul angajaţilor de la fiecare ghişeu este de 1 sau 2.

S-a presupus că $z_0 — t = 60$ corespunde unui sistem de verificare limitat complet şi că în acest caz toţi pasagerii care sosesc înainte de momentul z_0, care reprezintă aici momentul de deschidere a zborului şi nu momentul de

transfer, se împrăştie în holuri sau la bar şi se întorc la întîmplare în timpul perioadei de verificare *(z_0, t).* Astfel

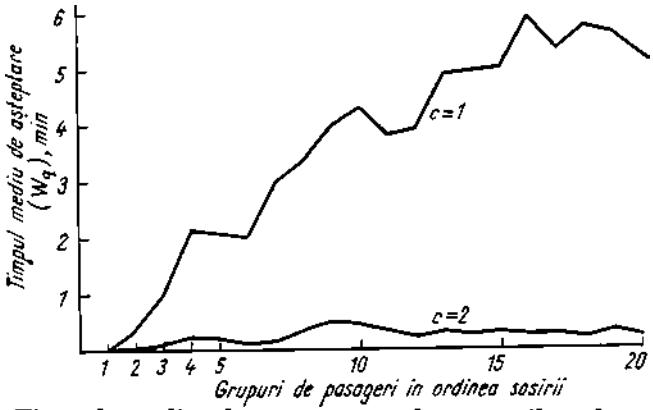


Fig. 10.7. Timpul mediu de aşteptare al grupurilor de pasageri la ghişeele limitate; rezultatele simulării In cazul z_0 — t = 60min.

toate cele 20 grupuri de pasageri sosesc, din punctul de vedere al verificării, în timpul celor 60 min dinaintea închiderii fiecărui zbor. Rezultatele acestui caz (v. fig. 10.7) indică foarte clar că dacă va fi un singur angajat pe zbor, atunci timpul mediu de aşteptare al pasagerilor este complet inadmisibil pentru grupuri care ajung la ghişeu după al doilea şi sugerează o nouă simulare pentru valori ale lui z_0 — t mai mici cu aproximativ 5 min. Prin aceste mijloace cercetătorii au dedus că pentru un singur angajat (care în cazul nostru este staţia de servire) transferul nu va putea avea loc mai tîrziu decît cu 6 min înainte de închidere.

Dacă sînt doi angajaţi pe zbor, orice moment este admisibil. Astfel, dat fiind timpul de aşteptare standard a cărui medie va fi de aproximativ 0,5 min, un sistem limitat de verificare, complet, fără transfer, va fi acceptabil dacă sînt repartizaţi doi angajaţi pentru fiecare zbor timp de o oră.

Următoarea întrebare a fost în ce condiţii un angajat va determina momente de completare acceptabile pentru z_0 — t = 6 min. Figura 10.8, dedusă din simulări Monte Carlo,

prezintă repartiţia

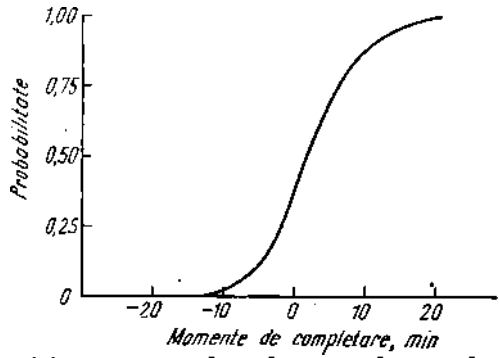


Fig. 10.8. Repartiţia momentelor de completare la ghişeele finale, pentru transferuri ce au loc cu 6 min înainte de închiderea zborului ($z_0 - t = 60$); rezultate obţinute prin simulare cu metoda Monte Carlo.

momentelor de completare pentru 100 de zboruri cînd transferul este planificat cu 6 min înainte de închidere. Chiar dacă selecţia făcută este de volum mic, este clar că completarea are loc după 15 min de la închidere pentru mai mult decît proporţia acceptabilă de 5 zboruri din 100.

în cele din urmă, cercetătorii au examinat problema dacă doi angajaţi pe zbor pot să aibă drept rezultat momente de completare

acceptabile şi, dacă este aşa, pentru ce valori ale momentelor de transfer. Figura 10.9 prezintă probabilitatea ca un moment de completare să depăşească 5 min, ca funcţie a momentului de transfer. Această figură sugerează că doi anagajaţi sint suficienţi pentru momente de transfer nu mai tîrziu de 13 min înainte de închidere. De fapt, s-a hotărît să se accepte 15 min. Pe baza acestor rezultate s-a alcătuit tabelul 10.6, prezentînd numărul angajaţilor necesari pentru ghişeele limitate de verificare, într-un sistem compus, pentru diferiţi timpi de servire.

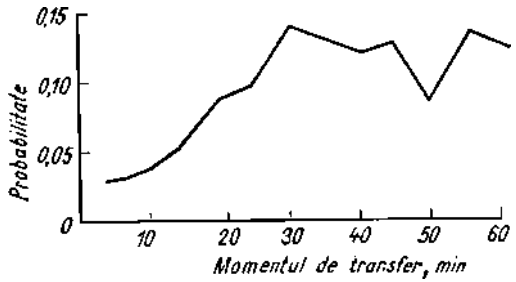


Fig. 10.9. Probabilitatea unui moment de completare intirziat la ghişeele finale cu doi angajaţi; rezultate obţinute prin

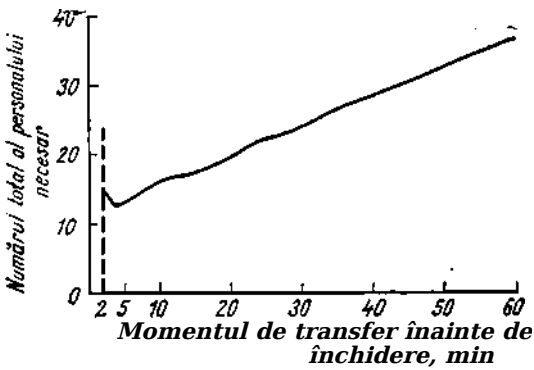


Fig. 10.10. Momentul optim de

Numărul angajaţilor ceruţi de sistemele de verificare compuse, pentru diferite momente de transfer, a fost obţinut însumîndu-se rezultatele pentru fiecare componentă. Eezultatele sînt prezentate în fig. 10.10.

Tabelul 10.6

NumArul angajaţilor la ghişeele finale

Timp de servire, min	**0**	**5**	**10**	**15**	**20***	**40***	**60***
Nr. angajaţi	**0**	**2**	**4**	**6**	**10**	**20**	**30**

*** Un angajat In plus la fiecare două zboruri pentru a satisface cerinţele**

momentelor de completare.

în practică este greu să se folosească un sistem compus de verificare cu momente de transfer care nu sînt multipli de 5 min. Astfel, figura 10.10 indică ca sistem optim acel sistem compus, în care transferul are loc cu 5 min înainte de închidere. în toamna lui 1958 noul sistem de verificare a fost inaugurat.

10.3. STUDIUL DE VALIDARE

Sistemul de verificare nu a satisfăcut pe deplin. Numărul de călători care s-au prezentat la ghişee a fost foarte apropiat de cel previzionat. Ghişeele au fost dotate cu personal în conformitate cu aceste previziuni, aşa cum se stabilise cu nouă luni în urmă. Dar cozi lungi tot mai erau şi, destul de ciudat, în special în perioadele relaxate ale zilei. Se părea că implementarea nu era corectă.

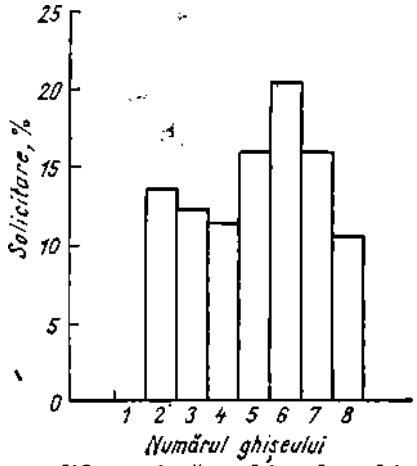


Fig. 10.11. Solicitarea diferenţiată a ghişeelor obişnuite de verificare.

Membrii echipei de cercetare, puţin modificate, au început să verifice schema sosirii călătorilor pentru zboruri. Diferenţa dintre aceasta şi cea care apărea cu doi ani în

urmă a fost mică (v. fig. 10.1). Verificări statistice separate ale repartiţiei timpului dintre sosiri, cu toate zborurile cumulate, au arătat că această schemă este exponenţială negativă, la fel ca în momentul original.

Următoarea etapă a fost să se urmărească disciplina de aşteptare. A fost măsurată solicitarea fiecărui ghişeu dintre cele opt, cu excepţia primului care nu funcţiona atunci. Figura 10.11 prezintă rezultatele : ghişeul 6 a fost aproape dublu solicitat faţă de nr. 8 şi nr. 4. Călătorii nu se răspîndesc egal la toate ghişeele (în primul studiu s-a presupus că o fac). De ce? Explicaţia este dată de planul suprafeţei de verificare prezentat schematic în fig. 10.12. Pasagerii merg la ghişeele cele mai apropiate de uşile prin care au intrat : ghişeul 2 a fost mai puţin solicitat datorită uşii duble prin care se ajunge la el pe calea cea mai scurtă, totuşi apropierea de uşă l-a ajutat puţin.

Membrii echipei au observat că pasagerul care s-a aşezat la un ghişeu în general nu se mai mută la altul. Au fost numeroase cazuri

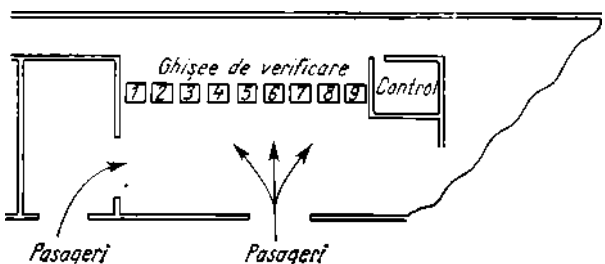


Fig. 10.12. Planul suprafeţei de verificare In clădirea aeroportului, cu poziţia ghişeelor şi a uşilor de intrare. Ghişeele 1 şi 9 erau folosite rar sau deloc.

cînd era coadă la ghişeul 7 şi nici o persoană la ghişeele 4 şi 3, pasagerii rămînînd la locurile lor. Acest lucru nu se întîmplă însă întotdeauna. Dacă vor să se deplaseze, călătorii o fac imediat spre dreapta sau spre stînga poziţiei

lor iniţiale şi se mută doar o dată. Această implică faptul că, indiferent de ghişeele disponibile, timpul de aşteptare al călătorilor nu este mai bun decît cel dat de grupuri de trei ghişee cu acces limitat.

în fig. 10.13 se interpretează aceste fapte; ea a fost construită după cum urmează :

1. Orele de aglomeraţie pentru fiecare din cele cinci zile au fost împărţite în subintervale de 15 min.

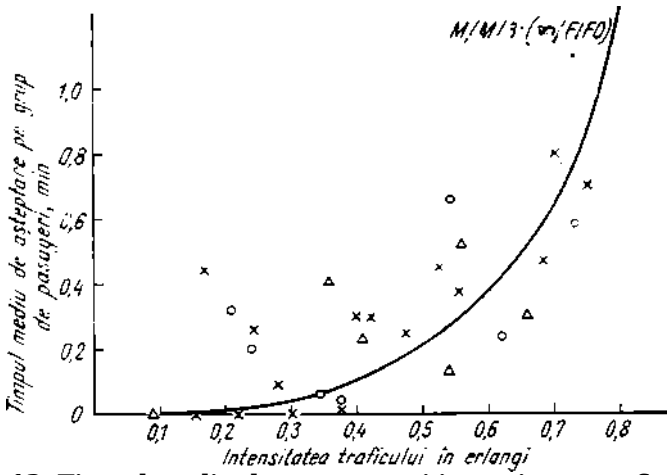


Fig. 10.13. Timpul mediu de aşteptare şi intensitatea traficului (la ghişeele obişnuite.)

A patru ghişee, x cinci ghişee, o sase ghişee.

2. A fost înregistrat fluxul total care soseşte şi este prelucrat la fiecare ghişeu şi, de asemenea, timpul de aşteptare al pasagerilor şi timpul de relaxare al tuturor angajaţilor.
3. Au fost calculaţi timpul mediu de aşteptare al pasagerilor şi utilizarea angajaţilor pentru fiecare interval de timp.
4. Rezultatele au fost reprezentate grafic pentru acele subintervale în care traficul este aproximativ egal.

Este evident că timpii de aşteptare pentru ghişeele 4, 5 şi 6 deschise sînt mai mari decît cei obţinuţi teoretic din modelul *M/M/c* :(oo/ /FIFO) datorită solicitării diferite a ghişeelor (ghişeele erau puse în funcţiune de obicei în ordinea 6,7,5,8,4,3,2). Dar timpii de aşteptare pentru ghişeele 5 şi 6 deschise, în loc să fie mai scăzuţi decît cel pentru ghişeul 4 deschise la orice nivel de utilizare, erau chiar mai ridicaţi.

Membrii echipei au examinat amănunţit repartiţia timpului de servire, ea a fost găsită aproximativ identică cu cea observată la ghişeele de verificare de zbor cu doi ani în urmă; ambele sînt comparate în fig. 10.14. Aceasta este neliniştitor căci la un ghişeu obişnuit

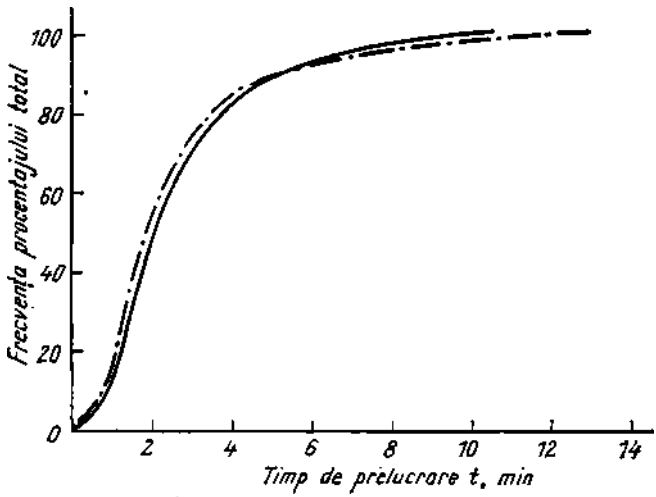


Fig. 10.14. Comparaţie între repartiţiile timpului de servire.
----------Observaţii In 1066. ghişee de «bor.
— • — Observaţii In 1968. ghişee comune

de verificare sînt mai puţine de făcut decît la un ghişeu de zbor. Care ar putea fi motivele? Cercetătorii au strîns informaţii referitoare la timpul mediu de servire şi la volumul de pasageri pentru fiecare interval de 30 min din mai multe zile şi le-au corelat (v. fig. 10.15). Timpul mediu de servire este corelat cu volumul de lucru. Acelaşi rezultat a fost obţinut şi pentru cazul în care funcţionează ghişeele 4 şi 6. Deci angajaţii lucrează mai repede atunci cînd văd mulţi pasageri în faţa lor. în timpul orelor de aglomeraţie timpul mediu de servire a unui pasager a fost de numai 1,50 min, mai mare decît 1,13 min planificate. Cozile din perioadele de vîrf pot fi atribuite parţial unui timp de servire

nedorit de lung. (Dar cititorul să noteze legea lui Parkinson : „munca se extinde pentru a umple timpul disponibil pentru îndeplinirea ei”.) De ce chiar în timpul perioadelor aglomerate timpul mediu de servire trebuie să fie mai lung decît cel prevăzut? Studiile rezervării de locuri pentru transportul aerian care au fost întreprinse în intervalul dintre a doua serie de studii de verificare şi aplicarea în practică a rezultatelor lor a sugerat răspunsul. Un angajat de la un ghişeu de verificare de zbor trebuie să reţină informaţii despre un singur zbor: la ghişeul obişnuit trebuie să-şi reţină informaţii despre 12 sau 16 sau chiar 20 de zboruri simultan. Membrii echipei au mai aflat că aproximativ 40% din pasageri (procentul variază de la zbor la zbor) cer informaţii în timpul verificării ; mai mult, ei au observat că angajaţii trebuie să consulte orarul zilnic pentru a da răspunsuri. Acest lucru sugerează că solicitarea

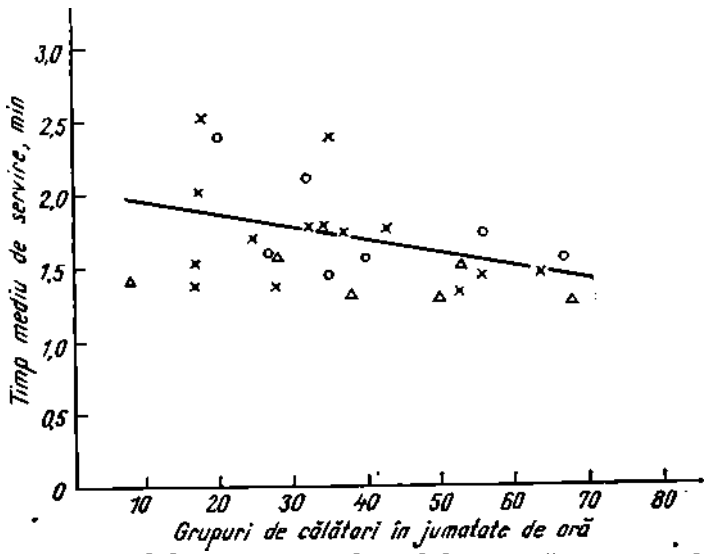


Fig. 10.15. Timpul de servire şi volumul de muncă. A patru ghişee, x cinci ghişee, o şase ghişee.

mărită a memoriei funcţionarilor poate să fie cauza unui timp de servire mai lung. Nu s-a constatat diferenţe semnificative între timpii medii de servire ai diferiţilor angajaţi, cu excepţia a două tinere care au venit în secţie abia de două săptămîni. Ambele erau mai încete decît media. Deci singura explicaţie raţională pare să fie solicitarea mai mare a memoriei angajaţilor şi comportarea ciudată a pasagerilor în aşteptare.

Ca rezultat, s-a constatat că pentru ca verificarea să fie eficientă, clădirea în care se află secţia trebuia să fie modificată în bună parte. De exemplu, uşile de intrare spre spaţiul de verificare trebuiau să fie mărite pentru a se evita concentrarea călătorilor la unele ghişee. Angajaţii trebuiau să aibă mijloace de acces mai rapid la informaţiile referitoare la zbor, cum ar fi televiziunea în circuit închis. Aici se încheie misiunea cercetătorilor, este rîndul arhitecţilor şi constructorilor. Suprafaţa reconstruită a fost dată în funcţiune la începutul anului 1961.

10.4. COMENTARIU

O atenţie deosebită trebuie acordată cazurilor, cînd rezultatele modelelor clasice de aşteptare se aplică unor sisteme în care atît staţiile de servire cît şi clienţii sînt oameni.

Două dintre cele mai comune ipoteze, pe care se bazează modelele obişnuite, sînt adesea invalidate; anume :

1. Repartiţia timpului de servire nu este neafectată de sistemul de intrare. Adesea timpul mediu de servire la un moment t este corelat cu intervalul mediu între sosiri la un anumit moment anterior $t - T$ (T poate fi foarte scurt sau chiar nul dacă staţia de servire-om este capabilă să detecteze rapid schimbările ce au loc în intensitatea intrărilor).
2. Dacă sînt mai mult de două staţii de servire, regulile FIFO nu se respectă; în general ele se respectă doar dacă se forţează acest lucru.

Totuşi analistul nu trebuie să renunţe la verificarea

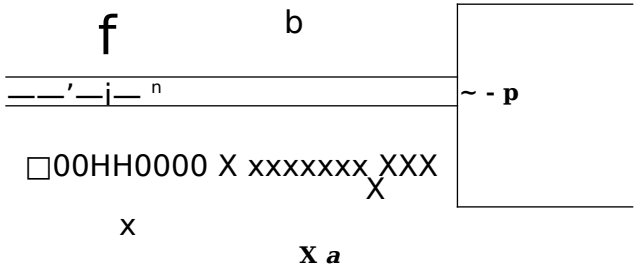
valabilităţii acestor presupuneri atunci cînd studiază sisteme ca cel prezentat în acest capitol.

11

PROBLEMA SORTĂRII CUPOANELOR

Vom examina în cele ce urmează o situaţie practică în care apare o singură staţie de servire. în fig. 11.1 este schiţată amplasarea ghişeelor comune de verificare a documentelor la un aeroport. Pasagerii se aşază în aşteptare în faţa unui număr de ghişee. La sosirea la ghişeu pasagerul îşi prezintă biletul, i se cîntăreşte bagajul, greutatea bagajului se înscrie pe bilet, apoi se detaşează cuponul. Ne va interesa ce se întîmplă în continuare cu acest cupon.

Funcţionarul pune cuponul pasagerilor pe un transportor de documente, care-1 transportă spre punctul de sortare. Aici cuponul



I'ig. 11.1. Schila amplasării transportoarelor de bagaje.

a — pasageri; b — transportor documente; c — control şl sortare a cupoanelor; d — transportor bagaje; e — spre punct de sortare.

cade intr-o cutie. Un funcţionar ia cupoanele din cutie unul cîte unul, le verifică şi le repartizează în casete, după indicativul zborului înscris pe fiecare cupon. Întîrzierile survenite în sortarea cupoanelor pot produce întîrzieri în plecarea avioanelor şi de aceea este foarte important ca

sortarea să fie rapidă. Dar acest lucru este greu de realizat prin simpla dublare a celor care sortează, deoarece, fără să vrea, aceştia interferează şi se stînjenesc reciproc.

Din acest motiv, prezintă interes determinarea capacităţii maxime de sortare a unui singur funcţionar. Aceasta poate limita numărul ghişeelor care alimentează un singur punct de sortare, ceea ce are consecinţe asupra proiectării spaţiilor de verificare a călătorilor, consecinţe care nu pot fi ignorate. Studiile ergonomice au condus la un proiect excelent al locului de sortare şi nu se întrevede nici o perspectivă pentru o reducere ulterioară a timpului necesitat pentru sortarea fiecărui cupon. Care este capacitatea unui funcţionar care sortează singur? Sau, mai general, care este repartiţia timpilor de aşteptare, la diferite intensităţi ale traficului în sistemul de aşteptare cu o singură staţie de servire în care : „clienţii" sînt cupoanele, „momentul sosirii" este momentul căderii cupoanelor în cutie, iar „staţia de servire" este funcţionarul care sortează. Ce putem să spunem despre intrările în sistem? Numărul cupoanelor care sosesc în punctul de sortare (să zicem într-o zi) este egal cu numărul pasagerilor care iau loc în avioanele ce au plecările în acelaşi interval de timp (ne permitem să ignorăm abaterea). Este clar că numărul pasagerilor verificaţi într-o oră este legat de numărul zborurilor ce au loc într-o anumită perioadă de timp. De asemenea este bine cunoscut faptul că zborurile nu sînt programate uniform în tot timpul zilei. Prin urmare, intensitatea medie a cupoanelor sosite în cutie nu este constantă. Cititorul familiarizat cu ideea de „perioadă ocupată" ne spune că aceasta nu are nimic de-a face cu intrările considerate în problema determinării capacităţii maxime. în lucrul la capacitate maximă intensitatea medie a sosirilor cupoanelor poate fi considerată constantă pentru o perioadă mai lungă. Aşa şi este, dar apar două efecte secundare ale modificării intensităţii intrărilor, efecte cu o anumită importanţă practică.

Întîi, oare timpul mediu de sortare al unui cupon de către un funcţionar variază odată cu variaţia intensităţii sosirii cupoanelor ? Dacă nu, probabil că totul este în ordine. Dar dacă da, oare în ce fel variază şi ce se întîmplă? Există oare

semne de stabilizare ce apar odată cu creşterea intensităţii de sosire? Dacă este aşa, atunci poate am putea calcula timpul de servire care corespunde intensităţii maxime de sosire. Dar dacă n-ar apărea semne de stabilizare? Observaţiile au arătat că fără îndoială funcţionarii care se ocupă de sosirea lucrează mai repede cînd au teancuri de cupoane nesortate decît atunci cînd sosirea cupoanelor are loc mai rar. Dar s-a constatat de asemenea că pe măsură ce creşte intensitatea sosirilor, funcţionarii tind să ajungă la un timp mediu minim de sortare şi nu mai pot să-l îmbunătăţească. Se impune o restricţie mai serioasă asupra timpului mediu de servire: limitarea proporţiei cupoanelor sortate greşit.

Unul dintre supraveghetorii de la un aeroport unde se studiau aceste probleme a sugerat că proporţia sortărilor greşite creşte în timpul perioadelor de aglomeraţie. S-au făcut cercetări şi s-a degajat cu claritate un prag peste care greşelile deveneau frecvente. Ca rezultat al acestor cercetări, echipa de cercetători a stabilit că timpul de sortare minim al unui cupon, timp care poate fi folosit în calcule, este de 2,1 s cu un coeficient de variaţie mai mic de 0,1. De fapt repartiţia timpului de servire a fost găsită constantă.

Să revenim la intrările în sistem. O analiză la întîmplare a momentelor sosirii în timpul unor perioade aglomerate scurte a arătat că repartiţia timpilor dintre sosiri este exponenţial negativă. Totuşi trebuie să privim acest rezultat cu grijă : sosirea cupoanelor în punctul de sortare a fost generată de plecările pasagerilor de la un număr finit şi, de fapt mic, de ghişee de verificare, număr care nu depăşea 11 în cele mai aglomerate perioade. In perioadele de aglomeraţie întotdeauna este cineva care aşteaptă sau este servit la fiecare ghişeu de verificare. Plecările de la fiecare ghişeu au loc în momente separate de un timp de servire. Aşadar, la fiecare ghişeu intervalul dintre plecări are o repartiţie identică cu repartiţia timpului de servire. Acestea sînt de tip Euler. Dacă nu am lua în consideraţie diferenţele de timp (mici) între plecările pasagerilor de la diferitele ghişee şi sosirile cupoanelor în cutie, datorite drumului mai lung sau mai scurt pe banda transportoare a cupoanelor,

atunci timpul dintre sosiri în punctul de sortare are aceeaşi repartiţie ca şi ieşirile cumulate ale mai multor procese de reînnoire cu repartiţii identice.

Cox şi Smith au arătat că în aceste condiţii repartiţia ieşirilor cumulate este aproximativ exponenţială negativă. A fost stabilită astfel o motivaţie pentru rezultatul obţinut empiric. Acest argument nu este deloc valabil pentru perioadele de relaxare, însă pe noi nu ne interesează decît perioadele de vîrf. Aşadar, pînă acum avem (aproximativ) sosiri Poisson şi un timp de servire constant. Modelul în codul Kendall este Jf/D/1. Totuşi modelul nu cuprinde încă disciplina de aşteptare. Cupoanele care vin pe transportor cad în cutie deasupra sosirilor anterioare sau plutesc şi se amestecă printre celelalte cupoane. Dacă funcţionarul care sortează este mai comod, el ia cupoanele în ordinea în care le găseşte şi astfel ordinea de servire este apropiată de regula LIFO. Dar nu este întotdeauna aşa. Unii funcţionari scot mai întîi cupoanele de dedesubt şi astfel ordinea de servire este apropiată de regula FIFO. însă cutia este destul de mare faţă de dimensiunile cupoanelor, care pot să rămînă pe pereţii cutiei în loc să cadă la fund. Toţi aceşti factori fac ca disciplina de aşteptare să semene foarte mult cu regula SIRO care deşi nu este foarte corectă pentru descrierea procesului, este mult mai realistă decît regulile FIFO sau LIFO.

Aşadar, procesul de aşteptare poate fi reprezentat prin modelul J//D/1 :(oo/SIRO) fapt care permite să se prevadă probabilitatea ca un cupon să întîrzie în cutie în timp mai mult sau mai puţin îndelungat. întîrzierea admisibilă este destul de mică : maximum 10 % din cupoane pot să întîrzie mai mult de 10 s.

în anul cînd s-a studiat această problemă tabelele lui Burke pentru modelul *M/D/l* :(oo/SIRO) nu erau disponibile ca să uşureze munca. Echipa de cercetători nu avea tabele decît pentru : modelele *M/M/l* :(oo/SIRO), *M/M/l* :(oo/FIFO), M/D/l :(oo/FIFO) şi nu prea mult timp la dispoziţie (căci erau în studiu şi probleme mai importante). Dacă aceste trei

modele sînt considerate în ordinea în care, pentru orice valoare a traficului, produc cei mai puţini timpi lungi de aşteptare, atunci trebuie să le scriem astfel: M/D/l :(oo/ /FIFO), *M/M/l* :(oo/FIFO), *M/M/l* :(oo/SIRO). Este logic să se presupună că modelul care ne interesează, anume *M/D/l* : (oo/SIRO) produce mai mulţi timpi de aşteptare lungi decît primul, dar mai puţini decît ultimul. Or, pentru un singur funcţionar, utilizarea maximă acceptabilă ce menţine timpul de aşteptare în limitele prescrise se încadrează între : 80 % din cea corespunzătoare primului model şi 53 % din cea corespunzătoare celui de-al treilea model. (Ambele procente au fost citite pe grafice şi se poate să se fi strecurat şi greşeli de citire.)

Intensitatea maximă de intrare a cupoanelor trebuie deci să situeze între circa 910 pînă la aproximativ 1370 cupoane pe oră. în plus soluţia poate fi menţinută cel puţin cinci ani.

Echipa de cercetători a găsit o soluţie operativă fără a rezolva în sens matematic problema formală. Ulterior a apărut articolul lui Burke (v. cap. 3). Utilizarea maximă dată de modelul Jf/D/l :(oo/ /SIRO) este, după Burke, de aproximativ 79 %. Cu alte cuvinte, nu este o diferenţă prea mare între cele două modele Jf/D/1 :(OO/FIRO) şi Jf/D/l :(oo/SIRO). Pentru noi a fost o satisfacţie să aflăm că aprecierea pe care am făcut-o era atît de aproape de cea corectă şi că soluţia pe care am dat-o a fost valabilă fără modificări cel puţin trei ani.

12

PATRU SITUAŢII SELECTATE

în acest capitol vom considera pe scurt patru situaţii în care a fost aplicată teoria aşteptării pentru a se obţine soluţii operaţionale ale unor probleme reale.

12.1. PROIECTAREA REŢELEI DE PISTE ÎN AEROPORT

Vom analiza investigaţiile făcute în Anglia de către matematicienii Laboratorului naţional de fizică în colaborare cu Ministerul Aviaţiei Civile. S-au făcut cercetări pentru proiectarea sistemului de căi de rulare şi de acces pentru noul aeroport din Londra, care era în curs de construcţie prin 1950. N-aş putea prezenta mai bine problema şi rezultatele obţinute decît unul dintre cei ce au participat efectiv, anume K. D. Tocher, ale cărui spuse le reproduc cuvînt cu cuvînt:

„Fluxul de material printr-un sistem de transport este limitat de capacitatea sistemului, de posibilităţile de întreţinere şi păstrare; ele determină în unele locuri gîtuiri care încetinesc întregul proces. De obicei în astfel de situaţii este chemat să îmbunătăţească situaţia un departament de cercetări operaţionale. Se pune problema dacă este posibil să se proiecteze un sistem care să reducă pe cît posibil acea încetinire a procesului care este datorată unor variaţii aleatoare. Teoria aşteptării rezolvă rar aceste probleme în

întregime, deoarece «ste o teorie descriptivă care prezice doar efectul variaţiei în sistem. Odată ce disciplina de aşteptare depinde de starea întregului sistem,, modelele matematice dezvoltate de către teoreticieni nu mai sînt folositoare. Devine necesară o teorie a servomecanismelor aleatoare; însă pînă în prezent nu au fost întreprinse studii serioase în acest domeniu. Totuşi teoria aşteptării poate să dea adesea indicaţii folositoare în cazuri de probleme de congestie a unui sistem. Ea a fost aplicată mai de mult în proiectarea unui aeroport. S-a propus ca aeroportul să asigure deplasări libere între pistele de rulare şi/sau platformele de încărcare şi de descărcare şi/sau hangare, cu singura condiţie ca fiecare avion să urmeze un traseu fix. Au fost propuse mai multe sisteme de îndrumare şi se cerea să se determine acel sistem care asigură debitul maxim de avioane, precum şi acest debit maxim".

Să facem două observaţii: prima, că Tocher şi colegii săi au abordat două dintre tipurile de probleme operaţionale menţionate în capitolele 6 şi 7, anume comparaţia între sisteme diferite şi estimarea, unor parametri ai unui sistem. Ne aşteptăm, în lumina celor cunoscute, ca al doilea tip să fie mult mai dificil. Tocher continuă :

„Fiecare sistem de îndrumare conţinea intersecţii la care avionul ar fi putut fi oprit. Aceasta era una dintre sursele de congestie. Fiecare platformă avea o capacitate limitată şi s-a pus restricţia ca doar un avion să se poată deplasa spre o platformă liberă. Astfel sistemul poate fi modelat ca reţea de şiruri de aşteptare alimentată iniţial de mai multe piste de rulare. Dacă luăm în considerare modelul matematic general, această reţea conduce la o problemă matematică imensă. Totuşi, dacă presupunem sistemul statistic stabil şi dacă considerăm doar starea de echilibru, se pot face oarecari progrese.

Vom presupune că timpul necesar pentru traversarea unei intersecţii, timpul de încărcare şi de descărcare au repartiţii exponenţiale negative. în această ipoteză problema se separă într-o mulţime de şiruri de aşteptare independente. Pentru fiecare astfel de şir de aşteptare, singurele date ce ne interesează sînt intensitatea medie a intrărilor şi timpul mediu de oprire (blocare). Odată stabilite

regulile de circulaţie şi densitatea traficului pe diferitele drumuri, intensităţile de intrare se obţin ca soluţie a unui sistem de ecuaţii liniare. Astfel, devine posibil să se evalueze mărimea şirului de aşteptare în fiecare punct de aglomeraţie şi astfel să se prezinte o vedere de ansamblu a numărului de avioane care aşteaptă în diferitele puncte ale sistemului în orice moment. Din punctul de vedere al pasagerului prezintă interes doar timpul total de aşteptare şi numărul de opriri intermediare. Şi acestea pot fi deduse folosind modelul, dar cu preţul unor calcule ceva mai complicate.

Ceea ce se obţine astfel nu poate fi acceptat în mod absolut, dar le putem folosi pentru studii comparative pentru a elimina unele dintre sistemele propuse.

Stabilirea nivelului maxim al debitului este foarte simplă. Fiecare şir de aşteptare individual trebuie să fie stabil şi astfel problema se reduce la studierea densităţii traficului care saturează diversele şiruri de aşteptare. Astfel apar cu claritate şi intersecţile care produc gîtuiri ale circulaţiei.

A mai fost posibil să se stabilească, pentru un sistem de îndrumare dat, cea mai bună dirijare a avioanelor pentru diverse situaţii. S-a putut stabili astfel că unul dintre sistemele de îndrumare era suficient de bun (pentru densitatea de trafic estimată). întregul studiu a relevat posibilitatea obţinerii unui flux mare, şi în final s-a renunţat la îndrumarea arbitrară în favoarea uneia strict controlate."

Această problemă a ridicat şi chestiunea alegerii după un criteriu bazat pe timpii de aşteptare sau pe timpii totali de aşteptare. Dacă, să zicem, trei sisteme conduc toate la un flux acceptabil de mare, atunci *va trebui ales între ele pe cel care asigură cel mai scăzut timp de aşteptare, sau pe cel care satisface anumite condiţii asupra timpilor de aşteptare şi este cel mai ieftin.

12.2. PROBLEMA AUTOBUZELOR ÎN AEROPORT

în aeroportul din Londra avioanele care vin sau urmează să decoleze se află în spaţii care nu sînt în imediata apropiere a clădirilor aeroportului. De cele mai multe ori

sînt necesare autobuze pentru transportul pasagerilor de la clădire la avion sau invers. Una din metodele folosite impune existenţa în rezervă a unui grup de autobuze pe o platformă, care să asigure transportul ori de cîte ori este nevoie. Numărul autobuzelor chemate variază, depăşind cîteodată numărul celor existente, deoarece sosirile şi plecările avioanelor variază din diverse motive în jurul momentelor planificate. Cercetătorii au fost interesaţi să calculeze numărul minim de autobuze care trebuie ţinute în rezervă pe platformă în diferitele momente ale zilei pentru a fi siguri că cel mult un procent mic de solicitări nu pot fi onorate imediat. Această problemă poate fi considerată o problemă de aşteptare. Autobuzele sînt staţii de servire, avioanele care pleacă (sau sosesc) sînt clienţii, iar timpii de servire sînt aceia în care autobuzele sînt ocupate cu transportul pasagerilor către sau de la avioane. Aceşti timpi sînt de fapt timpi de blocare, adică timpul de servire este acel timp pentru care un avion are nevoie de un autobuz. Timpul de servire a fost găsit aproximativ constant cu o medie de 7,5 minute şi o abatere standard de 1,7 minute.

Intrările în sistemul de aşteptare sînt totuşi departe de a fi repartizate Poisson. Analiza datelor înregistrate a arătat că intrările într-o perioadă de timp de o oră sînt repartizate aproape Poisson, cu o medie dată de

$$m_T = \mathrm{i}(s_{r\_}! + \frac{2}{4} s_r + s_{r+1}),$$

unde s_r reprezintă numărul zborurilor planificate în ora *r, iar* a_r numărul zborurilor reale.

Aşadar, în timpul oricărei ore, sistemul pare bine descris de modelul *M/D/c* :(oo/FIFO). Din păcate, numărul pasagerilor care urmau să fie transportaţi este variabil de la zbor la zbor, astfel încît procentul Kj de zboruri necesită un singur autobuz, în timp ce procentul K_2 necesită două ($7i_1 + K_2 = 1$). Aşadar, intrările constau de fapt în două intrări de tip Poisson; una pentru „clienţi" singuri, avînd intensitatea TtjWi,- şi alta pentru perechi de clienţi, avînd intensitatea $T_2 m_r$. Modelul care rezultă, r$_2$m)/Z)/c :(co/FIFO),

este total descurajator şi foarte greu i se pot găsi soluţiile analitice.

Cercetătorii au imaginat un procedeu de calcul pe care l-au folosit pentru a calcula valorile probabilităţii existenţei (în echilibru statistic) a cel mult *i* clienţi simultan. Apoi cercetătorii au întocmit grafice legînd : a) procentajul zborurilor servite necorespunzător (prin lipsa unui autobuz sau chiar a două), din : b) numărul zborurilor pe oră, pentru : c) două pînă la zece autobuze existente în rezervă. Problema a fost astfel rezolvată.

Interesul acestui studiu constă în faptul că este o ilustrare a modului în care cercetătorii au prezis intensitatea intrărilor cu ajutorul unei formule de interpolare, obţinînd astfel că intrările sînt aproximativ poissoniene pentru perioade de o oră.

12.3. ÎNTÎRZIERI ALE CIRCULAŢIEI ÎN PUNCTELE DE VAMĂ

Unul din cele mai renumite studii asupra problemelor reale de aşteptare a fost întreprins în 1950. Acest studiu a cucerit premiul Lanchester. Aici se prezintă sumar rezultatele muncii lui L. C. Edie, autorul studiului.

Una dintre activităţile cheie ale personalului de poliţie folosit de către Administraţia Portului New York este colectarea taxelor la poduri şi la tunele. în 1952, de exemplu, rulajul financiar generat de această sarcină depăşea 1 000 000 $ pe an. Analizele preliminare ale operaţiilor de la punctele de vamă au relevat faptul că aceste cheltuieli nu aveau deloc efectul optim: standardul de servire era foarte variabil de la un punct la altul şi de la un moment la altul; de asemenea folosirea ofiţerilor de trafic era foarte neregulată.

Se punea problema evaluării standardului de servire oferit clienţilor la punctele de vamă, şi a evaluării modului în care variază acest standard odată cu variaţia volumului de trafic ; de asemenea, se punea problema stabilirii standardului de servire ce trebuie oferit şi în final de a găsi modalităţi de a planifica personalul în modul cel mai eco-

nomic pentru a obţine acest standard.

S-au cheltuit mai multe sute de om/ore de muncă pentru a obţine datele empirice, pe baza cărora să se decidă modelul cel mai convenabil de folosit în studierea sistemului. După o muncă ulterioară la fel de lungă pentru analizarea acestor date, Edie şi grupul său de cercetători au ajuns să obţină un model satisfăcător. Detaliile pot fi găsite în articolul lui Edie††††††† ; nu avem spaţiul necesar pentru a le reproduce.

Intrările aveau o repartiţie Poisson la volume de trafic de pînă la circa 600 vehicule/oră şi o repartiţie normală peste această valoare. Cercetătorii au tras concluzia că acest efect corespunde apropierii repartiţiilor Poisson şi normală de repartiţia binomială şi au considerat apoi că numărul sosirilor pe unitatea de timp (luată a fi egală cu 30 s) este repartizat binomial.

Repartiţia timpului de servire a fost găsită constantă. Acest rezultat s-a stabilit pe două căi: mai întîi prin măsurarea unor timpi de servire, apoi prin comparaţia între datele observate la un punct de vamă privind legătura între timpii de aşteptare şi intensitatea traficului şi între datele teoretice obţinute din modelele Jf/Jf/l :(oo/FIFO) şi M/D/l : (oo/FIFO). însă atunci cînd cercetătorii au analizat situaţia pentru mai multe puncte de vamă, au observat că datele observate diferă mai mult de datele teoretice obţinute pe baza modelelor Jf/Jf/c: (oo/FIFO) şi *MlD/c :* (oo/FIFO). Motivul era că, în cazul mai multor staţii de servire, clienţii nu respectau strict regula FIFO. Destul de frecvent un vehicul se aşeza într-un şir de aşteptare lung, în timp ce pe altă linie nu erau deloc vehicule în aşteptare. Aceste observaţii au părut suficiente că să explice discrepanţa dintre rezultatele teoretice şi cele observate.

Edie a mai descoperit faptul că timpii de servire sînt legaţi de volumul de trafic. El a folosit relaţiile pe care le-a stabilit între intensitatea traficului şi timpii de aşteptare pe de o parte, şi timpii de servire şi volumul de trafic pe de altă parte, pentru a determina dependenţa între timpul mediu de aşteptare al unui vehicul şi volumul de trafic (în vehicule pe

---

††††††† **Edie, L. C.** ***Trafic Delays ai Toii Booths.*** **în : Oper. Research, 2, nr. 2, 1954.**

zi).

Următoarea fază a studiului a fost determinarea repartiţiei lungimilor şirurilor de aşteptare formate în faţa punctelor de vamă. Şi aceasta a fost făcută prin metode asemănătoare cu cele folosite în faza precedentă. în această fază Edie a considerat important să identifice cît de mult timp pot să întîrzie şoferii într-un şir de aşteptare pînă la a încerca posibilităţile de deplasare.

Următoarea fază, căreia din nefericire Edie i-a acordat mai puţină atenţie în articolul său, a constat în prognoza volumului orar de trafic în fiecare zi a săptămînii. Modul de variaţie a volumului de trafic a fost găsit identic pentru zilele de marţi, joi şi vineri; celelalte zile au necesitat un tratament individual. S-a găsit că împrăştierea între traficul mediu şi cel de vîrf era între 10 şi 60 procente la poduri şi între 10 şi 30 procente la tunele. Bineînţeles că în aceste împrejurări nu poate fi posibil să previzionăm cu o precizie mare traficul într-un punct particular de vamă, la o anumită oră dintr-o anumită zi a săptămînii.

Cititorul se poate mira ce volum mare de date a trebuit prelucrat pentru a obţine un model precis al sistemului de aşteptare.

în final, pe baza timpului mediu de aşteptare determinat în mod optim pentru un volum de trafic mediu (prognozat), s-a calculat numărul de puncte de vamă necesare să fie deschise, din jumătate în jumătate de oră. Apoi acestea au fost ajustate pentru a reduce traficul de vîrf la un nivel acceptabil. Astfel, s-a obţinut o planificare săptămînală a punctelor de vamă necesare şi a rămas doar problema planificării personalului (despre care însă Edie nu ne mai dă amănunte în lucrarea sa).

12.4. SISTEME DE ÎNTÎLNIRE

Un tip de sisteme de aşteptare care nu a fost discutat în capitolele teoretice din această carte, ci doar amintit, este cel în care momentele de sosire a clienţilor sînt dinainte

planificate. Două exemple : sosirile avioanelor la un aeroport (problemă de care se leagă al doilea exemplu din acest capitol) şi sosirea navelor cu minereu la cheiul unei uzine siderurgice. în ambele cazuri momentele reale de sosire diferă de cele planificate şi, după cum am observat deja cu cîteva ocazii, de obicei, este posibil să aproximăm modul de sosire real printr-unul poisso- nian. Dar ce se întîmplă dacă clienţii sosesc la momentele planificate ? Acest tip de sistem a fost studiat în legătură cu sistemele de programare a solicitanţilor la policlinici, iar sistemele de acest tip sînt numite de întîlnire.

Principalele modele studiate teoretic presupun că duratele dintre sosiri, atît planificate cît şi reale, sînt constante, astfel încît intrările sînt regulate. Insă abordarea analitică a acestor sisteme devine destul de dificilă, deoarece ele se abat de la presupunerile simple asupra repartiţiei timpilor de servire. Cu toate că modelele ca de exemplu D/M/l :(oo/FIFO) sînt interesante, ele nu sînt prea folositoare.

Mai recent, au fost publicate trei rapoarte care descriu cum au fost studiate unele sisteme de întîlnire. Unul dintre acestea, datorat lui Fry, prezintă un deosebit interes pentru că descrie experimentele făcute asupra unui sistem de aşteptare, mai curînd decît mînuirea unui model. Altul, datorat lui Welch, se ocupă de unele aspecte ale comportării iresponsabile a staţiilor de servire (în cazul nostru medici), care nu încep munca la timp, şi de efectele acestei comportări asupra sistemului de aşteptare. Şi acesta este extrem de interesant, deoarece există situaţii analoage în industrie care se pare că n-au fost încă discutate nicăieri. De exemplu, avioanele planificate să sosească la un aeroport găsesc pistele de rulare ocupate şi nu pot ateriza. Ultimul articol îl vom prezenta mai în detaliu.

Autorul articolului, R.R.P. Jackson, este un proeminent teoretician al aşteptării. Problema abordată de el constă în conceperea unui sistem de întîlnire eficient pentru cadrele medicale (trebuie să spunem că majoritatea medicilor britanici nu-şi consultă pacienţii în cabinet pe bază de programare şi că există o altă problemă, mai fundamentală

decît cea a determinării sistemului optim de întîlnire — anume convingerea medicilor că trebuie să adopte un sistem de întîlnire; în schimb, în Canada şi S.U.A. este o regulă să se planifice întîlniri între medici şi pacienţi).

Jackson abordează un număr de probleme practice ce apar în legătură cu sistemele de întîlnire pentru cadrele medicale, de exemplu apariţia urgenţelor. El arată că modelul de aşteptare adecvat situaţiei este *JD/E/l* :(oo/FIFO). De fapt, presupunerea că sistemul are capacitatea infinită nu este explicit formulată şi, dacă ar fi o cameră de aşteptare limitată, atunci modelul adecvat ar fi D/Ej/l :(Z/FIFO). în orice caz, metodele analitice existente sînt nepotrivite cu scopul urmărit, iar Jackson decide să simuleze modelul cu ajutorul unui calculator electronic (şi folosind un limbaj special de simulare). Această decizie, luată de un cercetător experimentat, este ilustrativă pentru limitele abordării teoretice (analitice) a problemelor de aşteptare.

Deoarece fiecare program de consultaţii era limitat la două ore (şi ne imaginăm că la sfîrşitul său doctorul amînă toţi pacienţii care încă se află în aşteptare), Jackson alege ca măsură pentru eficienţa doctorului timpul total pierdut de pacienţi aşteptînd. Cu ajutorul simulării Jackson obţine estimări ale timpului mediu de aşteptare al unui pacient, pentru diverse combinaţii ale timpului mediu de consultaţie şi ale duratelor medii între sosirile pacienţilor. Prin tabelarea lor se obţine intervalul optim între sosiri.

Jackson a cercetat şi o soluţie aproximativă, comparînd rezultatele simulării pentru modelul *D/Et/l* :(oo/FIFO) cu cele obţinute din formulele pentru modelul $E_k/M/1$:(oo/FIFO), pe care le-a stabilit anterior împreună cu Nickols. Ca rezultat al acestor studii, Jackson a conceput un sistem optim de programare a pacienţilor, care a fost apoi folosit de către însuşi medicul lui Jackson, cu avantaje pentru ambele părţi.

PROIECTAREA SEDIULUI DIN LONDRA AL COMPANIEI BEA

13.1. PREZENTAREA PROBLEMEI

Multe din problemele ridicate în cadrul acestei operaţii sînt legate de unele sisteme de aşteptare. Operaţiile de verificare a pasagerilor prezentate în cap. 10 sînt edificatoare în acest sens. Evident că mai există şi multe alte exemple. în cadrul acestui capitol vom prezenta trei dintre acestea. Fiecare din ele este un exemplu de alt fel de sistem, dar datorită faptului că apar în situaţii operaţionale apropiate, este necesar a le trata împreună.

Companiile aeriene care organizează zboruri între oraşe mari, cum ar fi New York sau Londra, au considerat eficient a crea sedii în oraş pentru pasagerii lor. Să analizăm de exemplu cazul Londrei, în anul 1958. în acea perioadă majoritatea pasagerilor de la Londra — lucru care poate este valabil şi astăzi — puteau fi repartizaţi în una din următoarele trei clase :

1. Pasagerii care locuiau în Londra şi care-şi începeau călătoria în Londra. Majoritatea acestora proveneau din districtele din zona central-vestică a Londrei, precum şi din suburbiile vestice.
2. Pasagerii originari din alte zone ale Marii Britanii, care au călătorit spre Londra cu trenul sau autobuzul, pentru a lua avionul de la Londra. Principalele staţii feroviare şi de autobuz se află în districtele vestice sau central-vestice ale oraşului, dar în nici un caz lingă aeroportul principal, Heathrow.
3. Pasagerii din alte ţări, care au vizitat Londra şi au locuit în hotelurile londoneze. Acestea se află în districtele vestice sau central-vestice ale oraşului.

Clasificări similare se pot face — şi chiar au fost făcute — pentru pasagerii ce călătoresc spre Anglia, via Londra^ venind din alte ţări.

Este limpede că un sediu localizat în zona vestică a

oraşului va fi un loc convenabil pentru a servi ca punct de colectare pentru pasagerii de la Londra şi ca un punct de destinaţie pentru pasagerii spre Londra. Există anumite avantaje atît din punctul de vedere al călătorului, cît şi din cel al companiei aeriene. Mai întîi, operaţia de transport al pasagerilor cu autobuze între sediul din oraş şi aeroport constituie un mijloc mai ieftin pentru pasageri. De exemplu, pentru două persoane, costul taxiului comparativ cu costul biletului de autobuz (cursa care duce la aeroport) este de 3 : 2 la Montreal, 2 :1 la New York şi 3 :1 la Londra. în al doilea rînd, pasagerul simte o anumită siguranţă, deoarece odată verificat la sediul din oraş, el nu mai are probleme legate de rezervarea locului, de bagaje sau de posibilitatea de a pierde cursa datorită întîrzierii. în sfîrşit, o companie aerieană consideră ca foarte eficientă cunoaşterea numărului de pasageri ce vor utiliza o anumită cursă, cu mai mult timp înainte de zbor. Avantajele pe care le prezintă un sediu în oraş, atît pentru pasageri, cît şi pentru companiile aeriene, variază de la oraş la oraş, iar global au tendinţă de diminuare odată cu diminuarea mărimii oraşului respectiv.

în primăvara lui 1958, conducerea Companiei BEA, conştientă de continua mărire a traficului pasagerilor, a decis să construiască un nou sediu în Londra şi să înlocuiască complet vechiul sistem de verificare a pasagerilor. Din motivele expuse anterior, noul sediu va trebui construit într-unul din cartierele vestice ale oraşului. S-a decis că cea mai bună amplasare, din cele posibile, era chiar locul ocupat de vechiul sediu.

Deşi, din punct de vedere strategic, aceasta era o decizie excelentă, ea a pus o serie de probleme dificile, datorită faptului că pă- mîntul era stîncos, existau deja construcţii, iar dedesubt trecea o linie de metro de maximă importanţă. Spaţiul era extrem de limitat şi era limpede că cea mai mare problemă era aceea de a folosi cu maximum de eficienţă spaţiul existent. Direcţiunea companiei a decis că analiza situaţiei şi determinarea capacităţii necesare trebuie făcută cu maximum de atenţie şi competenţă, mai multă poate ca niciodată. Relaţiile dintre direcţiunea companiei şi grupul de cercetări operaţionale erau foarte cordiale, şi de aceea nu a

constituit deloc o surpriză faptul că analiştii de cercetare operaţională au fost invitaţi să studieze capacitatea şi cerinţele operaţionale ale noului sediu şi să furnizeze date şi recomandări ce puteau fi folosite ca o bază de discuţie cu arhitecţii şi cu autorităţile oraşului.

Primul pas făcut de personalul de cercetare operaţională a fost de a observa operaţiile ce se executau în sediul provizoriu, pentru a putea identifica principalele probleme ale sediului şi de a culege date statistice referitoare la acestea. Aceste studii au început la 29 aprilie 1958. Ele au progresat aproximativ o săptămînă, pînă cînd o grevă a personalului din transporturile londoneze a determinat oprirea activităţii la sediu; toate operaţiile au fost transferate la aeroport. Studiul a reînceput în iunie atunci cînd greva a luat sfîrşit. O per- turbaţie de o asemenea natură are efecte profunde asupra validităţii datelor, şi echipa de cercetători trebuie să-şi ia măsuri suplimentare de precauţie atunci cînd le analizează. Pe parcursul analizelor efectuate au fost identificate 11 sisteme de aşteptare. Trei dintre ele au fost asociate cu operaţiile de verificare, asemănătoare celor discutate în capitolele anterioare.

Am selectat trei din celelalte pentru a le discuta în cadrul acestui capitol. Ele sînt :

1. Problema parcării maşinilor pentru o perioadă scurtă.
2. Sistemul de împrăştiere a clienţilor.
3. Problema încărcării autobuzelor la plecare.

13.2. CAPACITATEA LOCULUI DE PARCARE

Conceptual, aceasta a fost cea mai simplă problemă; de aceea este util să o discutăm la început. O trecere în revistă a modului în care pasagerii sosesc la sediul companiei de la casele lor sau de la hoteluri arată că 11,3% vin cu maşina personală. Adică, ei sînt conduşi de către soţiile lor, de către prieteni sau în unele cazuri de şoferi. Mai mult, 5,5 % din pasagerii ce sosesc la sediul companiei de la aeroport îl părăsesc cu maşina lor personală. O observare atentă arată

că, aproape fără excepţie, şoferii maşinilor particulare, ce însoţesc sau aşteaptă pasagerii la sediu, doresc să-şi parcheze maşina cit mai aproape de sediu, parcarea făcîndu-se pentru circa 20—30 minute în jurul momentului de plecare sau sosire a autobuzului.

Aceste necesităţi de parcare nu erau şi nu puteau fi satisfăcute de vechiul sediu. Spaţiul de parcare existent era foarte limitat de poziţia clădirii. Sigur că nu era în intenţia companiei să nu creeze facilităţile necesare pasagerilor şi prietenilor lor; din contră, dar nu era suficient spaţiu. S-a prevăzut totuşi ca noul sediu să prezinte mari posibilităţi de parcare pe termen scurt. Unele dintre aceste locuri de parcare ar putea fi foarte ieftine, în timp ce altele necesită fonduri mari, care ar putea fi valorificate mai bine.

Problema era de a stabili numărul maşinilor ce ar putea fi parcate lîngă noul sediu; sau, pentru a privi altfel problema, să se calculeze proporţia celor care au nevoie de spaţiu de parcare şi nu găsesc loc (din care cauză vor căuta pe străzile învecinate sau vor veni la sediu cu taxiul).

Companiile aeriene există şi se dezvoltă în strînsă legătură de gradul de satisfacere a cerinţelor călătorilor (şi bineînţeles, gradul de securitate pe care îl garantează). Ar fi dificil de imaginat o altă întreprindere industrială în care se cheltuieşte atît de mult timp în legătură cu acest aspect al activităţii sale. Prin urmare, problema ce se punea lua forma următoare : cîte locuri de parcare sînt necesare, astfel încît la orele de vîrf ale activităţii, pentru luna iulie, în primul, al cincilea şi al zecilea an de la proiectarea sediului, numai o maşină din 20 sosite să nu poată intra imediat în locul de parcare. în discuţii s-a cerut la început ca nici o maşină sosită să nu aştepte eliberarea unui loc de parcare, ci să găsească repede un asemenea loc. Pe de-o parte, limitarea de spaţiu nu poate permite acest lucru, dar, pe de altă parte, dacă se alocă spaţiu pentru pasagerii care aşteaptă zborurile, atunci este destul de evident că trebuie alocat spaţiul corespunzător pentru parcare.

Problema, în limbajul teoriei aşteptării, nu era o problemă a timpului de aşteptare, ci una de *pierdere.* Iar măsura eficacităţii soluţiei nu era dată de vreun parametru al repartiţiei timpului de aşteptare, ci era tocmai

probabilitatea respingerii, adică este probabilitatea ca o maşină sosită să fie nevoită să se întoarcă, deoarece locul de parcare este plin.

Această operaţie poate fi tratată ca o problemă de aşteptare. Staţiile de servire sînt locurile de parcare; sosirile sînt maşinile cău- tînd un loc de parcare; timpul de servire este tocmai timpul de ocupare a spaţiului de parcare; nu este permisă aşteptarea. Se remarcă faptul că este un model extrem de uşor de mînuit, deoarece atîta timp cît sosirile sînt repartizate Poisson (aşa cum s-a constatat că sînt în acest caz) probabilitatea ca toate staţiile de servire să fie ocupate este independentă de forma exactă a repartiţiei timpului de

servire, atîta timp cît este de tipul E_k, şi este dependentă numai de timpul mediu de servire. Cititorul care doreşte demonstraţia celor afirmate este rugat să urmărească cap. *4,*

cazul mai multor staţii de servire. Formula este (v. cap. 4)

$$P_0 = \frac{(ep)^c}{} \qquad (13.1$$

unde p_0 *este* probabilitatea ca toate cele c staţii de servire să fie libere, iar p pentru acest caz cu mai multe staţii de servire este X/(c fi). Formula pentru p_0 este

$$P_O \qquad \frac{1}{(cpf} \qquad (13.2$$

„t

Singura problemă ce urma să fie rezolvată era următoarea : timpul pentru care pasagerii doresc să-şi parcheze maşina este sau nu repartizat Erlang. Aceasta nu este doar o simplă chestiune de observaţie, deoarece repartiţia timpului de parcare poate fi controlată prin adoptarea unei politici corespunzătoare a tarifului de parcare. Modul general al politicii de tarifare pentru o operaţie ca cea a parcării pe o durată scurtă de timp este următorul:

pentru parcare mai puţin de T_o min : nici o taxă,

parcare între T_o şi T_r min : şilingi/h,

parcare mai mult de T_2 min : M_2 şilingi/h.

Jfj este o taxă care nu se ridică la un nivel foarte ridicat — să spunem *5* şilingi, funcţionînd ca un îndemn adresat şoferului pentru a părăsi locul. Jf_2 este o taxă suficient de ridicată, menită a penaliza şoferul egoist (care ignorează necesităţile şi drepturile celorlalţi).

A fost necesar să se realizeze acest sistem de taxe. Nu a

fost o chestiune uşoară şi dealtfel nici nu am realizat-o extrem de bine. Principalul rezultat pe care l-am obţinut a fost acela că majoritatea călătorilor s-au obişnuit să utilizeze doar timpul rezervat lor, nu să-l depăşească. Am recomandat apoi ca taxa să fie ridicată; presupu- nînd că ea este suficient de mare, putem continua calculele presupu- nînd că timpul de servire (adică parcarea) este constant şi egal cu limita T_o. Repartiţia timpului constant de servire este un caz particular al repartiţiilor Erlang R_k, anume cazul în care k este infinit. Pot fi aplicate formulele (13.1) şi (13.2) şi se obţine numărul de locuri de parcare. Aceasta a fost o parte a proiectului ce nu a fost folosită.

învăţătura, rezultată din acest scurt exemplu este aceea că pentru problemele de proiectare şi de planificare în care trebuie aplicată teoria aşteptării este necesar să cunoaştem ce repartiţie a timpului de servire va fi. Ar fi poate mai corect — din punctul de vedere al preciziei — să studiem diferite variante alternative decît a elabora un model al sistemului de aşteptare.

O analiză exhaustivă a problemei parcării a fost realizată de Hurst în cadrul portului New York.

13.3.ÎMPRĂŞTIEREA PASAGERILOR CE PĂRĂSESC SEDIUL

Vom prezenta în cele ce urmează situaţia existentă în 1958. Pasagerii ce soseau la aeroportul Heathrow cu avioanele companiei BEA erau, în cazul cînd doreau acest lucru, duşi la Londra cu autobuzul companiei. La sediul companiei, pasagerii descindeau din autobuz, îşi aşteptau bagajele şi apoi fiecare se îndrepta spre oraş, utilizînd diferite mijloace : taxi, metrou, autobuz, pe jos etc.

Majoritatea pasagerilor preferau să părăsească sediul cu taxiul, iar în perioada pentru care s-a realizat studiul, s-a putut remarca că la anumite ore pasagerii soseau de la aeroport mai repede decît puteau fi preluaţi de către taxiuri. Din acest motiv ieşirile sediului companiei erau foarte congestionate.

Problema era de a determina, pentru viitorul sediu al companiei, nivelul de preluare al pasagerilor de către taxiuri, în scopul eliminării inconvenientului amintit. Problema avea mai multe părţi, pe care le vom prezenta sub forma unor întrebări:

1. Cîţi pasageri vor dori să părăsească sediul în orele de vîrf în anii ce urmează?
2. Ce procent din aceştia vor dori să părăsească sediul cu taxiul?
3. Cîţi pasageri vor fi aduşi de la aeroport cu autobuzul, în orele de vîrf?
4. La ce intervale de timp vor sosi autobuzele la sediu, în orele de vîrf, în următorii ani?
5. Cîţi pasageri sînt transportaţi de un taxi ?
6. Cît timp necesită încărcarea bagajelor şi încărcarea pasagerilor într-un taxi?

La prima din aceste întrebări s-a răspuns cu ajutorul prognozelor de trafic, realizate de sectorul de planificare al companiei. Nu este •cazul să prezentăm aici aceste prognoze.

La a doua problemă răspunsul a fost dat astfel: doi reporteri au călătorit cu autobuzele între aeroport şi sediu timp de mai multe zile, chestionîndu-i pe pasageri asupra modului în care ei intenţionează să părăsească sediul cît şi asupra modului în care ar dori ei să o facă dacă sediul ar fi legat direct, prin intermediul unei scări rulante, de staţia de metro. Răspunsurile în cele două cazuri nu diferă foarte mult, şi datorită faptului că s-a hotărît să nu se construiască o legătură directă spre staţia de metro, au fost luate în considerare doar următoarele :

Procentul pasagerilor care susţin că vor părăsi sediul:

cu taxiul	74,0;
pe jos pînă la staţia de metro şi apoi cu metroul	16,5;
cu maşina personală :	5,5;
pe jos :	2,5 ;
cu autobuzul:	1,5.

Nu a surprins popularitatea taxiurilor. Ceea ce a surprins a fost gradul mic de variaţie a procentelor celor ce au preferat taxiurile în diversele curse investigate. De fapt, pentru 95% dintre autobuze, acest procentaj este cuprins între 71 şi 79 %. Rezultatele analizei făcute au fost confirmate, prin observări directe a comportamentului călătorilor în cadrul fostului sediu.

Nu era dificil de stabilit nici numărul pasagerilor ce sosesc cu autobuzul în orele de vîrf prin observări directe; din fericire, înainte ca această muncă să capete amploare, s-a ajuns la concluzia că ea nu era necesară. Numărul pasagerilor ce iau loc intr-un autobuz variază foarte mult în cadrul unei zile, dar este destul de evident că el nu variază prea mult în timpul orelor de vîrf. Pe parcursul unor asemenea perioade, dispecerii auto de la aeroport nu lăsau autobuzele să plece avînd locuri libere; de cele mai multe ori ei aşteptau ca un autobuz să se umple şi abia după aceea îl lăsau să pornească spre sediu. în perioadele în care cursele soseau foarte frecvent, iar numărul pasagerilor era extrem de ridicat, autobuzele se încărcau rapid şi această politică nu reprezenta o întârziere sau un inconvenient pentru pasageri. De aceea atît atunci, cît şi pentru viitor, s-a considerat că numărul pasagerilor ce iau loc într-un autobuz, în orele de vîrf, este constant. A fost foarte uşor de determinat, prin observări directe, numărul pasagerilor ce iau loc într-un taxi: media era 1,35, iar repartiţia foarte concentrată pe valorile 1 şi 2.

Avînd în vedere că numărul pasagerilor ce solicită taxiurile este relativ constant, constanţa încărcării autobuzelor în orele de vîrf şi gradul scăzut de variaţie a numărului de pasageri ce iau loc într-un taxi, nu greşim prea mult aproximînd repartiţia $<p_r$ a numărului de taxiuri corespunzătoare unui autobuz plin, în orele de vîrf. O calculăm aproximînd prima şi a treia componentă cu ajutorul repartiţiei bi- nomiale; dar în final ne-am hotărît s-o considerăm constantă, avînd o valoare suficient de mare, cam de nivelul 80 %-cuantilei. în consecinţă am considerat că fiecare autobuz încărcat generează o cerere de N taxiuri.

în timpul orelor de vîrf plecarea autobuzelor de la aeroport are loc, în conformitate cu politica de încărcare şi

cu densitatea sosirii avioanelor, la intervale aproximativ regulate. Sosirile la sediu erau, însă, destul de neregulate. Figura 13.1 prezintă repartiţia duratelor dintre sosirile autobuzelor, în timpul orelor de vîrf, doar pe parcursul studiilor iniţiale. Fără îndoială că aceasta nu este constantă. Era limpede că sursa neregularităţilor era sistemul de şosele dintre Heathrow şi sediul din Kensington. Există o situaţie specială la Hammersmith, care acţiona asupra autobuzelor ca un concentrator, adunîndu-le laolaltă. Au fost consultate autorităţi competente, cum ar fi poliţia metropolitană şi laboratorul de cercetări rutiere. Rezultatele acestor consultări au fost acelea că programul de îmbunătăţiri rutiere prevăzute pentru cartierele vestice ale Londrei vor elimina aceste dificultăţi în câţiva ani.

Fiind însărcinaţi cu studiul de perspectivă, am considerat că în anii următori repartiţia timpilor dintre sosirile autobuzelor în orele de vîrf va fi constantă. Era evident că intervalele de timp dintre sosiri nu vor fi constante, dar şi mai evident era faptul că ele vor fi mai mult constante decît aleatoare. Trebuie să recunosc că am greşit, dar extrem de puţin.

Este posibil ca unii cititori să fie în acest moment foarte nedumeriţi. Abordarea clasică a problemei, aşa cum este indicată în cărţile didactice de cercetare operaţională, trebuie să fie cu totul alta. Unde sînt oare simulările, fotografiile aeriene ale congestiilor de trafic pe şoseaua Cromwell, analizele amănunţite ale „concentratorului” de la Hammersmith prin analogie cu hidrodinamica ? Trebuie să mărturisesc că nu le-am considerat necesare şi nu ne-am permis să cheltuim timpul şi banii ca să le facem.

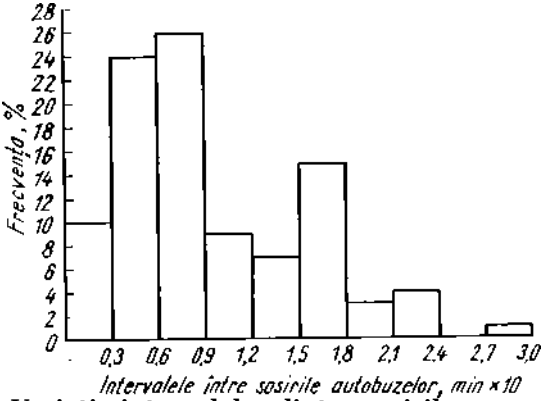


Fig. 13.1. Variaţia intervalelor dintre sosirile consecutive ale autobuzelor, cu media de 9 min, numărul de observaţie fiind egal cu 68.

în fine, repartiţia timpului necesar unui taxi pentru încărcarea bagajelor, urcarea pasagerilor şi părăsirea peronului a fost obţinută prin cronometrare directă. Ceea ce rezultă poate fi considerat ca timpul pentru care un taxi exclude pe altul de la folosirea peronului, deci nu este un timp de servire normal, ci un timp de *blocare.* Repartiţia empirică obţinută este prezentată în fig. 13.2. Odată cu aceasta, echipa de cercetători a fost capabilă să construiască modelul sistemului de împrăştiere a pasagerilor cu ajutorul taxiurilor. Caracteristicile principale ale modelului erau :

1. Intrările în sistem : la fiecare *x* minute soseşte un autobuz la sediu şi pasagerii săi au nevoie de taxiuri.
2. Un autobuz plin de pasageri, în orele de vîrf, generează o cerere de *N* taxiuri, unde *N* este un parametru luînd valori întregi,

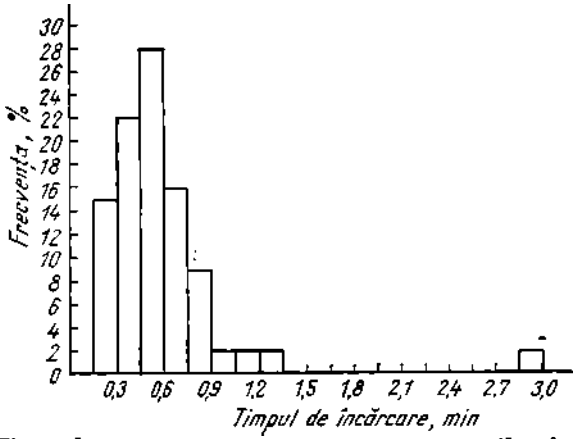


Fig. 13.2. Timpul necesar pentru urcarea pasagerilor în taxiuri, cu timpul mediu de Încărcare de 0,5 min, numărul de observaţii fiind egal cu 54.

ce are posibilitatea de a varia anual, dar este constant pentru o perioadă de vîrf dintr-un anumit an.

3. Există un spaţiu adecvat pentru încărcarea simultană a *c* taxiuri.

4. Timpul de *blocare* (de încărcare) al unui taxi este *t,* avînd densitatea de repartiţie *b(t).*

5. Ordinea în care pasagerii sau grupurile de pasageri iau taxiurile este nesemnificativă.

Problema era de a stabili repartiţia timpului total necesar celor *N* taxiuri ca să preia toţi pasagerii unui autobuz.

Obiectivul era de a determina un *c* suficient de mare pentru a asigura cu o probabilitate mare ca toţi pasagerii dintr-un autobuz să plece din sediu înaintea sosirii următorului autobuz.

Este suficient să tratăm operţiunea ca desfăşurîndu-se în două faze. în prima fază, numărul taxiurilor ce urmează să fie încărcate, pe care-1 vom nota cu $N - r$, nu este mai mic decît c, numărul persoanelor. în faza a doua, acest număr este mai mic decît *c.*

Presupunem că densitatea de repartiţie a duratei care este timpul cuprins între sosirea pasagerilor şi momentul în care rămîn $c - 1$ taxiuri de încărcat, este /(fj; fie $g(t_2)$

densitatea de repartiţie a duratei, necesare încărcării acestor c — 1 taxiuri. în acest caz, timpul total t de la sosirea pasagerilor şi pînă la terminarea încărcării ultimului taxi, are densitatea de repartiţie dată de

$$MO = (\quad — \quad Jo$$

Această relaţie este mult simplificată utilizînd cunoscuta prioritate a transformatelor Laplace :

$$h^*(z) \qquad g^*(z). \qquad (13.3)$$

Trebuie menţionat că $h(t)$ va fi dependentă de $N,$ atîta timp cît nu s-a făcut vreo ipoteză asupra lui $N.$

Următorul pas este de a determina funcţiile/(fj) şi $g(t_2).$ Le vom determina utilizînd două modele simple. Vom începe cu un model pentru prima fază. Acest model presupune că probabilitatea eliberării unui peron prin încărcarea unui taxi într-un interval de timp d£ este pidt, astfel încît atîta timp cît numărul taxiurilor ce rămîn să fie încărcate este mai mare decît $c,$ intensitatea medie de încărcare a taxiurilor este cpi. Adică, repartiţia timpilor de blocare (de încărcare) este exponenţială, avînd forma

$$ue^{'1"}.$$

Deşi acest lucru nu este întru totul adevărat, aşa cum reiese din fig. 13.2, totuşi este o primă aproximaţie suficient de corectă. Timpii reali de încărcare nu sînt atît de aleatori aşa cum reiese din această presupunere, astfel încît utilizînd-o vom avea tendinţa de a supraestima numărul peroanelor necesare. Pasagerii vor părăsi sediul mult mai rapid decît rezultă din calcule.

Fie $p(N — r, t)$ probabilitatea ca la un moment t să rămînă $N—r$ taxiuri ce urmează a fi încărcate cu pasageri. Atunci pentru prima fază avem

$$t) =— cpp(p(N, t), \text{ dt}$$

$$\frac{}{\text{dZ}} p(N — r,t) =— cţip(N — r,t) + cy.p(N — r + 1, t) (0 < r \text{ c}),$$

4;P(C-1, t) = *Cp.p(c, t).*
cu

Soluţia acestor ecuaţii este

$$/(tj = {}_{Cf}ie\text{-}^{\wedge}{}' > {}^{(C\wedge 1)N} - \bullet \qquad (13.4)$$

Transformata Laplace a acestei funcţii este

$$,f^*(z)=\left(—r\sim^{e+i}\right)_{\backslash\ Cjx + z\ /}. \qquad (13.5)$$

Modelul utilizat pentru a doua fază presupune de asemenea încărcări aleatoare. Cititorul va identifica cu siguranţă ecuaţiile modelului, care sînt:

$$—p(c - l,t) - (c — \mathrm{l})\mathrm{up}(\mathrm{C} - 1,0, \mathrm{di}$$

$$— p(r, \mathrm{i}) = — rnp(r, t) + (\mathrm{r} + 1)\ np\ (r + 1, \mathrm{t})\ (1\ r < c — 1) >$$

di -^-7>(0, i) = p.p(l, i).
di

Soluţia se găseşte uşor :

$$<7\ (\mathrm{M}\ ^{=}\ (\mathrm{c} - 2)^{e'\text{''},S\text{“}\ 1)C}\sim^{2(13\text{ı}6)}$$

Transformata Laplace a acestei expresii este

$$(1 + \frac{1}{\quad}\ .\ \frac{\mathrm{T}(1 - {}_{g}/|z)\ \mathrm{T}(c - 2)}{\mathrm{T}(c — z/pi — 1)} \qquad (13.7$$

Utilizînd cunoscuta identitate T(z) = (z — 1) T(z—1), aceasta poate fi scrisă ca

$$\mathbf{1}$$

$$\left(1 + \frac{z}{\mu}\right)\left(1 + \frac{z}{2\mu}\right)\left(1 + \frac{z}{3\mu}\right) \dots \left(1 + \frac{z}{(e-1)\,\mu}\right).$$

în consecinţă, transformata Laplace a repartiţiei timpului total de încărcare a *N* taxiuri, a căreidată densitate este *h(t),* este

(13.8)

Ea poate fi scrisă şi sub forma :

Dar transformata Laplace este o funcţie generatoare, astfel incit g^r coeficienţii lui — luaţi cu semne corespunzătoare sînt momentele *r!* m'_r în vecinătatea originii ale repartiţiei *h(t).* Acestea pot fi uşor modificate cu ajutorul formulelor

$$m_2 = m,2 — mţ^2;\ m_3 = m_3 — 3w?(m_2 — mp, .. .,$$

ce le convertesc în momente în vecinătatea valorii medii. Primele patru asemenea momente sînt:

Lr I *r* *C* J fi (13.9

wi₂ $\left[\sum_{r=1}^{c-1} \frac{1}{r^2} + \right.$ A — C ∓ 1 ~ (13.10)

$$\left. \sum_{r=1}^{c-1} \frac{1}{r^3} + \frac{N-c+1}{c^3} \right] \frac{1}{\mu^3},$$

$$m_4 = \left[\sum_{r=1}^{c-1} \frac{1}{r^4} + \frac{N-c+1}{c^4}\right] \frac{6}{\mu^4} + \left[\sum_{r=1}^{c-1} \frac{1}{r^2} + \frac{N-c+1}{c^2}\right] \frac{3}{\mu^4}. \quad (13.12)$$

Cititorul va remarca din aceste momente că coeficienţii Pearson de asimetrie şi exces sînt respectiv :

$$\sqrt{\frac{m_3^2}{m_2^3}} \qquad \sqrt{N}$$

Aşadar, pentru valori suficient de mari ale lui A[7], repartiţia este aproximativ normală. Este un lucru de mare importanţă practică, deoarece inversarea transformatei Laplace A*(z) este o sarcină foarte dificilă.

Numărul de peroane necesare pentru încărcarea pasagerilor în taxiuri, peroane care în acest caz sînt tocmai staţiile de servire, a fost calculat pentru fiecare din anii care interesează analiza, folosind această aproximare normală.

$$m_1(c) + 1{,}96\sqrt{m_2(c)} \leqslant x \qquad (13.1$$

Altfel spus, a considera că cu o probabilitate de 95% pasagerii unui autobuz ce au nevoie de *N* taxiuri se vor împrăştia înaintea sosirii următorului autobuz revine la a calcula pe c astfel încît

Calculele făcute nu vor fi prezentate aici, deoarece o prezentare detaliată va cere explicaţii privind prognoza traficului. în orice caz, aceste chestiuni nu prezintă interes.

Rezultatele acestor calcule au fost utilizate în proiectarea sediului, înainte de a părăsi acest proiect al sediului companiei, ar fi util să facem o sumară trecere în revistă a aspectelor legate de modelul ce ar fi rezultat, dacă nu am fi făcut presupunerea simplificatoare că fiecare autobuz generează un număr constant de taxiuri în timpul orelor de vîrf. Este evident că în realitate acest număr, pe care-1 notăm cu *n,* nu este constant. El are o repartiţie nesimetrică care nu poate fi identificată cu precizie. Am fi putut repartiza probabilităţi pentru diferite valori întregi (concentrate cu o mare frecvenţă în jurul mediei) definind astfel o funcţie de repartiţie, să spunem $?_n$. în acest caz transformata Laplace a repartiţiei timpului de încărcare a

pasagerilor în taxiuri va fi următoarea :

unde *Ji$(z)* este identică cu *h*(z),* în care *N* este înlocuit cu *n,* iar Jf este numărul pasagerilor transportaţi de către un autobuz. O astfel de analiză ar fi însemnat o muncă uriaşă, fără îndoială lăudabilă, dar practic inutilă. Calculele menţionate nu sînt imposibil de realizat, dar necesită o muncă foarte laborioasă.

13.4. ÎNCĂRCAREA AUTOBUZELOR SPRE AEROPORT

Pasagerii care au fost verificaţi pentru zbor la sediul companiei aeriene trebuie transportaţi la aeroport pentru a se alătura celor care au fost verificaţi direct la aeroport. La aeroport, cele două grupuri fuzionează. Există mai multe modalităţi de a organiza această operaţie. Din raţiuni pe care nu este necesar să le discutăm acum, s-a decis să fie menţinută metoda utilizată la sediul existent. Adică fiecărui avion care decolează de la aeroport îi va corespunde un autobuz care va părăsi sediul la o oră fixată, înaintea orei de decolare. Durata deplasării (pe atunci de 75 min) depinde de condiţiile rutiere dintre Kensington şi Heathrow; se estima că această durată se va micşora. Durata exactă nu ne interesează, doar că ea determină planificarea exactă a autobuzelor de la sediul companiei, ca o cacaracteristică a metodei utilizate.

Autobuzele nu pot pleca spre aeroport mai devreme de ora fixată (există cazuri cînd apar pasageri în ultimul moment), iar uneori ele pleacă mai tîrziu (datorită întîrzierilor în verificarea pasagerilor sau în sortarea bagajelor). Figura 13.3 arată repartiţia întîrzierilor plecărilor de la sediul existent. Nu ne aşteptam la o schimbare a acestui fenomen în viitor, oricum însă unele modificări aduse vor îmbunătăţi sistemul.

Timpul necesar urcării pasagerilor într-un autobuz era dependent într-un mod oarecare de numărul acestora. Şi datorită măririi capacităţii avioanelor pe liniile BEA, ne aşteptam ca numărul pasagerilor ce trebuiau transportaţi cu autobuzul să sporească; trebuiau găsite anumite modalităţi, de exemplu trebuiau mărite dimensiunile autobuzelor de transport, dar trebuia să găsim şi o modalitate de a estima durata de încărcare a unui autobuz. Cercetătorii, membri ai

echipei de studiu, au înregistrat timpul necesar încărcării pasagerilor din momentul anunţării îmbarcării şi pînă în momentul în care ultimul pasager s-a urcat în autobuz şi şi-a ocupat locul. Rezultatele sînt prezentate în fig. 13.4, care arată faptul că timpul de încărcare are o tendinţă de creştere odată cu creşterea numărului pasagerilor, dar

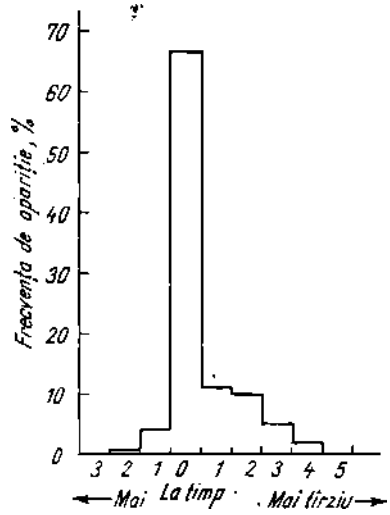


Fig. 13.3. Punctualitatea plecării autobuzelor, cu abaterea medie de 0,7 min, numărul de observaţii fiind egal cu 83.

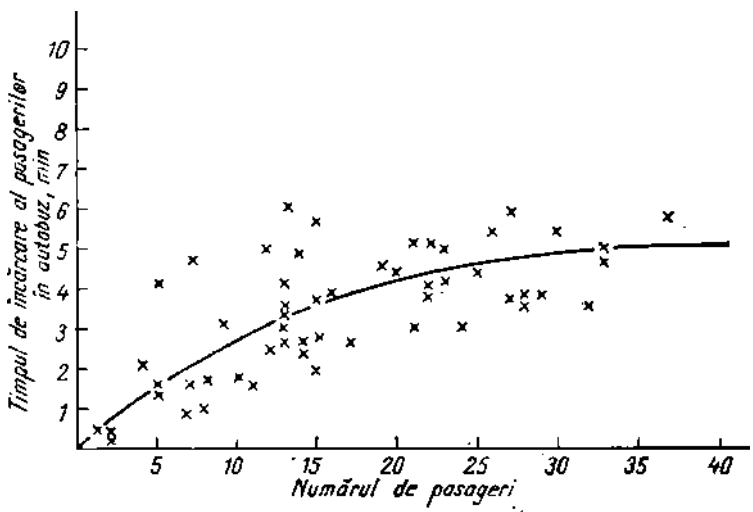


Fig. 13.4. Corelaţia dintre timpul de urcare al pasagerilor tn autobuz şi numărul de pasageri.

nu direct proporţională. Timpul mediu de încărcare a fost

calculat aşa cum reiese din figură, iar abaterea standard a fost de asemenea estimată.

Analizele efectuate au arătat că repartiţia pasagerilor între sediu şi aeroport (adică cîţi vin la sediu la verificare şi cîţi direct la aeroport) a fost pe parcursul perioadelor de vîrf din ultimii doi ani o repartiţie binomială. Parametrul binomial a, reprezentînd probabilitatea alegerii sediului, variază sezonier şi zilnic, dar în timpul orelor de vîrf are o valoare relativ constantă. Prin urmare, numărul pasagerilor care solicită autobuzul la sediu, considerînd că sînt *N* pasageri înregistraţi pentru zborul respectiv, este dat de

$$P(r) = \quad ot^{r}(l - a)^{N\_r}.$$

(Putem să facem abstracţie de pasagerii care nu au bilete rezervate dinainte, ducîndu-se direct la aeroport. Numărul acestora este foarte scăzut şi de regulă ei merg direct la aeroport.) Repartiţia numărului de pasageri pe zbor era cunoscută, şi în plus se cunoşteau şi previziunile pentru viitor. Aceasta a fost utilizată împreună cu repartiţia binomială prezentată mai sus şi cu repartiţia timpului de încărcare a pasagerilor (rezultată din datele din fig. 13.4), în scopul obţinerii unei repartiţii a timpului de încărcare a unui autobuz pe zbor. Au fost utilizate metodele de simulare Monte Carlo pentru a combina aceste trei repartiţii. Datorită faptului că în acea perioadă echipa de analişti nu putea folosi nici un calculator electronic, totul a fost realizat manual, utilizînd tehnici destul de învechite.

Nu ne-a interesat să observăm direct timpul necesar autobuzelor de a manevra spre şi de la locul de încărcare, deoarece ştiam că în noul sediu lucrurile vor fi cu totul diferite. Consultîndu-ne cu şeful proiectului noului sediu şi cu doi experţi, a fost posibil să obţinem estimări pentru acest timp de manevrare.

Timpul minim pentru care un autobuz blochează utilizarea locului de îmbarcare, adică împiedică pe următorul să-1 folosească, a fost calculat adunîndu-se următoarele componente :

1) timpul necesar autobuzului pentru manevrare spre locul de îmbarcare;

2) timpul de îmbarcare a pasagerilor;
3) întîrzieri ale plecării autobuzelor datorită pasagerilor;
4) timpul necesar autobuzului pentru a ieşi de la locul de îmbarcare.

Cititorul poate să considere desigur că repartiţia formată de aceste componente este o repartiţie a timpului de servire. Sistemele de aşteptare, din categoria cărora face parte acesta, au ca staţii de servire locurile de încărcare. Dar cine vor fi clienţii? Clienţii vor fi autobuzele ce ajung la locurile de îmbarcare pregătite pentru a lua pasageri. Momentele în care autobuzele sînt gata de a încărca pasagerii trebuie planificate înaintea momentelor planificate pentru plecarea autobuzelor; ele trebuie să fie corelate cu momentele în care li se anunţă pasagerilor plecarea autobuzului.

Pe parcursul orelor de vîrf, aceste momente au fost dispuse regulat, atît la vechiul sediu, cit şi la cel nou. Intervalul constant dintre plecările autobuzelor, care poate fi prognozat cu cîţiva ani înainte, asigură acest lucru. De aceea intrările în sistemul de aşteptare sînt caracterizate prin sosiri constante, regulate. Se părea că modelul ce putea fi aplicat aici în mod corespunzător era modelul de aşteptare *DIE$_k$/c:* (oo/FIFO). Pentru echipa de cercetători era însă limpede că a trata problema într-o astfel de manieră nu era deloc util, deoarece încă nu erau deduse formulele pentru repartiţia timpului total de aşteptare pentru un astfel de model.

Ar fi fost posibil ca echipa de cercetători să fi obţinut rezultate satisfăcătoare prin analizarea teoretică a modelului *DIE$_k$lc* : (oo / /FIFO), dar problema practică necesita o soluţionare urgentă. Era necesar a găsi cît mai repede un răspuns la întrebarea : ,,Cîte peroane de încărcare a autobuzelor vor fi necesare în 1963, 1965, 1970?”.

Un răspuns exact, bazat pe calcule matematice, nu putea fi obţinut în numai cîteva zile; de aceea soluţia era de a da un răspuns foarte aproximativ. Din această cauză s-a renunaţat la modelul matematic al sistemului, acesta fiind înlocuit de un model bazat pe simulare.

Simularea reprezintă o metodă utilă pentru rezolvarea problemelor ce nu pot fi tratate analitic, cu ajutorul

experimentelor aleatoare puse în concordanţă cu o structură logică de decizie. în cap. 6 am analizat metodele de simulare iar cititorul care nu cunoaşte principiile generale ar trebui să citească mai întîi primele paragrafe ale capitolului 6.

Odată luată decizia de simulare a sistemului, a devenit necesar a se analiza eventualele modificări ce vor fi aduse, pe parcursul următorilor ani. Una din cele mai frecvente greşeli ce se fac în simulare este aceea de a nu lăsa suficientă flexibilitate structurii. Am studiat apoi un număr de metode operaţionale, ce puteau da rezultate bune. Acestea au fost testate, comparîndu-le cu modul de lucru existent. Pentru a reduce numărul pasagerilor ce necesită un fotoliu, fiind în aşteptare în cadrul sediului, şi pentru a micşora întîrzierile plecării autobuzelor, s-a propus de către imul dintre supraveghetori ca fiecare autobuz corespunzător fiecărei curse aeriene să fie parcat cu 15 minute înainte de ora la care este programată plecarea, astfel încît pasagerii să poată să se îmbarce din timp, pentru a evita aglomeraţia din ultimele minute. Această schemă a fost testată timp de cîteva luni la vechiul sediu şi se pare că a dat rezultatele aşteptate. Au apărut însă două mari dezavantaje ale acestei scheme, ambele cît se poate de evidente, dar pierdute din vedere în entuziasmul general ce a însoţit introducerea schemei şi testarea ei:

1) era necesar un număr mai mare de autobuze ;
2) în orele de vîrf, erau necesare mai multe peroane de îmbarcare, întrebările la care trebuia găsit un răspuns în ambele cazuri era :

„Cîte anume?”

în acest scop s-a simulat două proceduri operaţionale, şi s-au comparat rezultatele. Simularea a fost realizată manual, utilizînd hîrtie, creioane şi tabele de numere aleatoare, după cum urmează:

1. Au fost create mai multe orare ale plecărilor autobuzelor pentru perioade de vîrf de trei ore. Acestea presupuneau (fapt rezultat din observaţii) că în prima oră intervalele dintre plecări au tendinţa de descreştere, în timpul celei de-a doua ore de vîrf ele sînt constante, iar în ultima au din nou tendinţa de a creşte.
2. A fost selectat un orar. Începînd cu plecarea cea mai timpurie, pentru fiecare plecare a unui autobuz, se extrage

un număr aleator dintr-un tabel cu numere aleatoare şi prin alăturarea sa la repartiţia „timpului de servire”, se generează astfel în mod aleator un timp de servire.

3. Se ţinea o evidenţă privind numărul de autobuze prezente la peroane în fiecare moment. Numărul maxim înregistrat arăta numărul peroanelor necesare, dacă autobuzele nu trebuiau să aştepte eliberarea unui peron.

4. Această procedură a fost repetată de mai multe ori, utilizînd diferite orare de plecare, generîndu-se diferite secvenţe de numere aleatoare.

Pentru fiecare variantă operaţională a fost obţinută astfel o repartiţie a peroanelor necesare în orele de vîrf. Numărul peroanelor necesare a fost considerat a fi numărul necesar pentru a evita întîr- zierile la 19 din 20 autobuze. Cititorul ar putea fi interesat să afle anumite date concrete. De exemplu, într-o oră de vîrf, în care autobuzele sînt planificate să plece din trei în trei minute, în care timpul mediu de blocare este de nouă minute iar încărcarea medie a unui autobuz este de 22 de pasageri, erau necesare patru peroane, dacă se adopta schema veche. Dar în noua schemă propusă, în care timpul mediu de blocare era de 16,5 minute, era nevoie de opt peroane, în aceleaşi condiţii. Acest caz prezentat este un exemplu al unei foarte importante probleme în planificarea viitoarelor operaţii, care poate apărea ca fiind complicată pentru a fi analizată matematic, însă pe care un om practic o rezolvă destul de uşor.

14

PROBLEMELE DE AŞTEPTARE ÎNTR-UN SISTEM DE CONTROL

Cititorul va fi iertat dacă cele discutate pînă acum, atît din punct de vedere teoretic cit şi cel practic, l-au condus la ideea că sistemele de aşteptare sînt toate doar o chestiune de factori ori de relaţii între factori, totul fiind măsurabil în unităţi de timp — secunde, minute, ore sau săptămâni. Timpii dintre sosiri, timpii de servire, timpii de aşteptare şi timpii totali de aşteptare sînt toţi de acest tip. Majoritatea problemeleor ce apar în studiul sistemelor de aşteptare sînt legate de astfel de timpi; există însă şi excepţii, iar acest capitol prezintă una dintre ele.

Să considerăm următoarea situaţie. D-na Evans se duce la magazin pentru a-şi cumpăra o cutie cu şase perechi de ciorapi de nylon, preambalaţi, ce se vinde cu un preţ acceptabil. După o aşteptare de circa cinci minute, ea ajunge să fie servită. ,,Vă rog mărimea 10, nuanţă deschisă", îi spune vînzătoarei. Aceasta este însă obosită şi grăbită (căci mai sînt mulţi clienţi ce aşteaptă). O va servi, fără îndoială, cu promptitudine pe d-na Evans, care va părăsi magazinul cu cutia de ciorapi. Ajungînd acasă şi deschizînd cutia, ea constată că ciorapii au mărimea 12, nuanţă închisă. Oare timpul ei de aşteptare, sau timpul ei total de aşteptare, este pe măsura calităţii serviciului prestat de către vînzătoare ?

în cadrul acestui capitol ne vom ocupa de o problemă în care serviciul furnizat de o staţie de servire poate fi un serviciu eronat, defectuos, în care probabilitatea unui

serviciu defectuos este dependentă de comportamentul sistemului de aşteptare, astfel încît criteriul de determinare a capacităţii staţiei de servire este în primul rînd de natură calitativă şi abia în al doilea rînd şi indirect un timp de aşteptare.

14.1.PREZENTARE A PROBLEMEI

Avioanele sînt costisitoare şi nu sînt rentabile decît în măsura în care ele realizează cursele cu capacitate completă. Atunci cînd cererea de transport este extrem de ridicată, timpul pe care avionul îl petrece pe sol trebuie să fie minim. Atunci cînd un avion aterizează, la sfîrşitul unei curse, el trebuie trimis în altă cursă în cel mai scurt timp posibil. Este important ca dirijarea să se facă nu numai rapid ci şi cît mai convenabil, căci orice întîrziere a unei plecări poate determina scăderea substanţială a utilizării parcului de avioane.

Dirijarea avioanelor constă în realizarea succesivă a mai multor acţiuni, ordonate într-un anumit fel. Dacă o acţiune se termină mai tîrziu decît este prevăzut, următoarea va fi de asemenea întârziată.

Anumite companii aeriene au ajuns la concluzia că operaţia de retrimitere a avioanelor în cursă, cel puţin la marile aeroporturi, trebuie să fie foarte bine dirijată, astfel încît cauzele reale şi potenţiale ale întîrzierilor să fie detectate şi eliminate rapid. Soluţiile alese diferă ca natură cît şi ca eficacitate şi sînt în mare măsură determinate de diferite moduri ale organizării conducerii aeroporturilor.

Una dintre cele mai raţionale soluţii a fost adoptată de compania BEA. Aceasta a constat în favorizarea înfiinţării, la fiecare aeroport mai important, a unui organ de control, al cărui personal să cunoască în orice moment starea avioanelor, în timpul care este necesar pregătirii fiecărui avion pentru decolare. Conducerea credea, justificat, că procedîndu-se în alt mod ar fi fost dificil de coordonat diversele activităţi, foarte variate dealtfel, şi de luat deciziile necesare impuse de înlocuirea unor curse. Astfel, în 1955 coordonarea şi dirijarea activităţilor de planificare a

zborurilor pentru multe aeroporturi din Anglia a fost realizată în cadrul companiei BEA prin înfiinţarea departamentului de control al BEA.

în primăvara lui 1956, s-au constatat anumite neajunsuri la aeroportul din Londra, în timpul perioadelor de vîrf. Simptomele erau : întîrzieri excesive în prelucrarea informaţiilor, transmiterea de informaţii eronate, culminînd cu neefectuarea de către întregul grup a unor operaţii esenţiale. în consecinţă, conducerea companiei BEA a cerut departamentului de organizare să efectueze un studiu cu scopul de a creşte eficienţa departamentului de control de pe lingă, aeroportul din Londra, astfel încît să se revină la un nivel calitativ ridicat. Problema fiind de teoria aşteptării, ea a fost preluată de un grup de cercetare operaţională, în particular de către autorul prezentei lucrări.

14.2. STUDIUL PRELIMINAR

Prima sarcină a fost de a stabili ce anume trebuia să realizeze departamentul de control şi ce realiza de fapt. Aceasta părea la prima vedere o sarcină considerabilă, dar care a putut fi dusă uşor la îndeplinire datorită faptului că cei interesaţi erau tocmai conducătorii departamentului. Pe scurt, iată sintetizate rezultatele acestei faze preliminare : iniţial scopul departamentului de control era de a coordona activităţile de pregătire pentru zbor şi de a asigura ca fiecare decolare să se facă la momentul planificat. Se presupunea că acest lucru se va realiza prin controlul continuu efectuat asupra avioanelor, în pregătirea lor pentru curse, şi prin înregistrarea şi controlul parţial al pasagerilor în incinta aeroportului. Responsabilitatea departamentului în ceea ce priveşte punctualitatea plecărilor cerea şi îndeplinirea unei a doua funcţiuni: a depista cauzele tuturor întîrzierilor şi raportarea lor conducerii.

Coordonarea activităţilor de pregătire pentru zbor a fost efectuată după cum urmează. Fiecare avion ce urma să decoleze era vizitat periodic de un observator, care nota activităţile terminate şi estima, pe baza experienţei sale, care activităţi încă neefectuate ar putea produce întîrzieri. Aceste notări şi observaţii erau transmise centrului de

control prin intermediul unui aparat de radio-emisie-recepţie.

Informaţiile erau recepţionate la departamentul de control de către controlorul de zboruri care înregistra încheierea activităţilor pregătitoare, semnala întîrzierile potenţiale celor interesaţi şi dirija activitatea observatorului.

Atunci cînd apărea ca inevitabilă o întîrziere, controlorul de zboruri decidea ce modificări sînt necesare în pregătirea pentru zbor şi informa toate secţiile în legătură cu situaţia ivită şi cu durata probabilă a întîrzierii.

Celelalte secţii comunicau cu controlorul de zboruri printr-un sistem de intercomunicaţii, după cum se arată în fig. 14.1. Acea parte a muncii de control ce era legată de fluxul pasagerilor prin incinta aeroporturilor era realizată de un grup cunoscut sub numele de AGC.

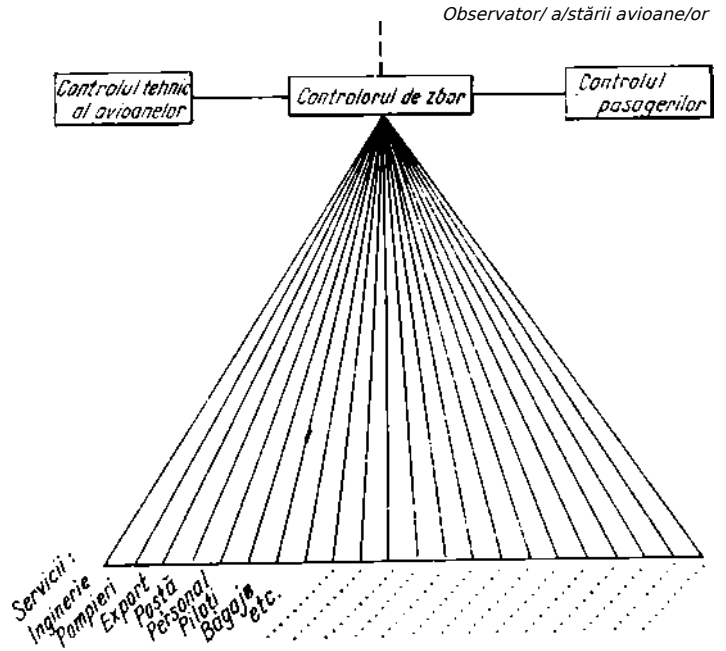


Fig. 14.1. Reţeaua de comunicaţie a controlorului de zbor.

Aceasta reprezenta grupul de legătură între controlorul de zboruri şi unităţile de servire a pasagerilor. Membrii acestui grup nu aveau autoritatea de a decide, îmbarcarea pasagerilor trebuind să se supună deciziilor luate de către controlorul de zboruri; ei trebuiau doar să controleze îmbarcarea corectă a pasagerilor şi să informeze unităţile de servire a pasagerilor în legătură cu orice întîrziere ivită.

Următoarea fază a studiului a constat în identificarea motivelor care provoacă întîrzierile. Aceasta au apărut cu claritate în timpul perioadelor de vîrf. Primul motiv a fost dificultatea de a se realiza legătura între diversele secţii şi controlorul de zbor pentru a se schimba informaţii. Al doilea

motiv era faptul că atît observatorii aparatelor de zbor cit şi membrii grupului AGC trebuiau să transmită datele şi problemele ce necesita luarea unei decizii controlorului de zbor, care, deşi experimentat, avea o serie de dificultăţi în luarea acestor decizii. în al treilea rînd, controlorul de zbor încurca şi uita unele informaţii, fapt dovedit de transmiterea unor instrucţiuni şi decizii eronate.

Aceste motive, analizate şi în cadrul departamentului de control, au arătat limpede că sursa deficienţelor era departamentul de control al plecărilor. Prin urmare, principalul cîmp de studiu era funcţionarea acestui departament de control.

14.3.STUDIUL PRINCIPAL: CONTROLUL PLECĂRILOR

Pentru a realiza studiul funcţionării departamentului la control a trebuit să selectăm un număr de ore de vîrf şi prin observare directă să determinăm conţinutul şi durata mesajelor transmise şi recepţionate către şi de la controlorul de zbor. Această fază a proiectului a stabilit că funcţia de control a zborurilor, efectuată de o singură persoană, nu era deloc simplă. Figura 14.2 arată modul de recepţio- nare a informaţiei prin sistemul de comunicaţie şi clasificarea acesteia după gradul de urgenţă şi după durata de folosire. Informaţia este

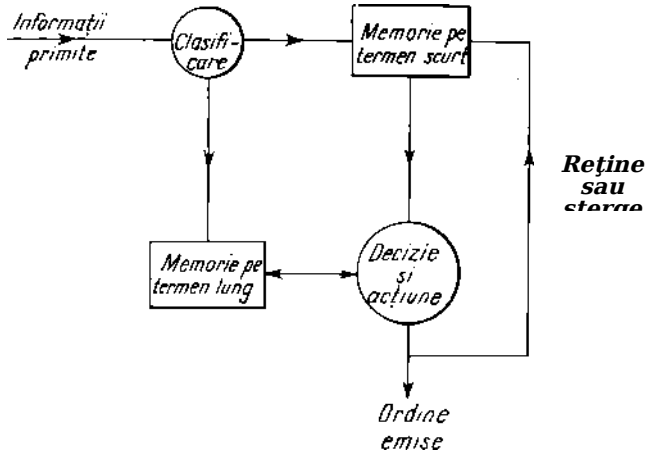


Fig. 14.2. Funcţia de control al

memorată prin scrierea ei pe un program al curselor aeriene la pupitrul controlorului de zbor, sau menţinută în memorie pînă cînd va fi solicitată pentru luarea unei decizii.

Memoria controlorului de zbor era asigurată într-un sistem de memorare cu acces direct pentru informaţiile cu termen scurt de păstrare şi printr-un alt sistem de memorare pentru informaţiile cu durată mai lungă de păstrare. O memorie pentru informaţiile cu termen scurt de păstrare a fost necesară din două motive : în primul rînd, ca o memorie tampon, pentru a reţine toate informaţiile mai rapid decît pot fi ele prelucrate şi, în al doilea rînd, ca un acumulator pentru a colecta informaţiile referitoare la o anumită problemă specifică, înaintea luării unei decizii. Scopul memoriei pentru informaţiile cu termen lung de păstrare era de a reţine care activităţi importante au fost terminate în cadrul operaţiilor de pregătire a avioanelor pentru decolare şi de a reţine informaţiile cu caracter statistic (de exemplu numărul de pasageri transportaţi).

Acest model al funcţionării controlorului zborurilor sugerează o analiză de aşteptare pentru a determina încărcarea controlorului de zbor în timpul perioadelor de vîrf. Observaţiile făcute în aceste perioade au arătat că controlorul era ocupat cu rezolvarea apelurilor într-o proporţie de 65 % din timpul său disponibil. Durata apelului,

care în acest caz este mai curînd un timp de blocare decît un timp de servire (deoarece cuprinde cîteva secunde în plus de serviciu suplimentar după terminarea recepţionării unui mesaj) a fost găsită avînd o repartiţie aproximativ exponenţială, cu o medie de 0,23 min. S-a constatat că informaţiile erau tratate într-o ordine aleatoare. Modelul de aşteptare pentru controlorul de zboruri este — cel puţin în primă aproximaţie — obişnuitul Jf/Jf/1 : (oo/SIRO), iar tabelele lui Wilkin- son arătau că comunicările de informaţii sînt întîrziate în medie cu mai mult de 0,5 min, cel puţin 6% dintre ele fiind întîrziate cu mai mult de 2,5 min. Aceste calcule au fost confirmate de verificările făcute. Deci controlorul de zboruri era suprasolicitat în orele de vîrf. în consecinţă, trebuie urmată una din următoarele două căi: 1) reducerea numărului de informaţii ce trebuie recepţionate şi prelucrate, sau 2) divizarea muncii între două sau mai multe persoane.

A fost realizat, cu destul de mult succes, un studiu privind reducerea numărului de informaţii. Acest studiu nu implică probleme de teoria aşteptării, aşa încît nu-i vom acorda atenţie. Rezultatul acestui studiu a fost reducerea numărului de informaţii primite într-o proporţie de 70 % comparativ cu nivelul anterior. Aceasta a micşorat încărcarea controlului de zbor în orele de vîrf şi ne-a permis să ne ocupăm de altă problemă. Întrucît pînă acum n-a fost vorba deloc despre informaţii prelucrate eronat sau uitate, am acordat atenţie în continuare analizei erorilor făcute de către oameni supraîncărcaţi în orele de vîrf. O analiză a apariţiei erorilor în cadrul mesajelor, bazată pe informaţiile stocate în memoria controlorului de zbor a arătat că în perioadele de vîrf frecvenţa erorilor era mai ridicată. Cu alte cuvinte, probabilitatea ca o informaţie să fie distorsionată sau pierdută creşte odată cu creşterea încărcării controlorului de zboruri. Nu se cunoştea o formă exactă a acestei relaţii şi ar fi foarte dificil să o determinăm, dar observaţiile făcute sugerează că ar putea fi reprezentată aproximativ astfel:

$$f(n) = 0{,}005\ n, \qquad (14.1)$$

f(n) fiind probabilitatea ca o informaţie să fie pierdută sau distorsionată, iar *n* este numărul de informaţii primite pe

minut şi memorate pe termen scurt.

Cum un număr de *n* mesaje memorate pe termen scurt era echivalent în vechiul sistem cu 1,43 *n* mesaje sosite la controlorul de zboruri, această relaţie poate fi scrisă şi sub forma

procentul de mesaje eronate = / = 0,015 *x,* (14-2)

unde *x* este procentul de ocupare a controlorului pentru rezolvarea mesajelor.

O relaţie de acest tip este analoagă cu rezultatele cunoscute din teoria informaţiei şi, mai cu seamă, în psihologie. Experimentele făcute au arătat că creşterea erorilor este proporţională cu creşterea nivelului de activitate. Dar ele au condus de asemenea la conceptul de volum de înregistrare; acest concept a apărut mai semnificativ, datorită faptului că cantitatea de informaţii ce trebuie stocată in memoria controlorului la fiecare moment depinde de numărul de informaţii. Astfel, dacă ar exista un volum maxim de înregistrări fără erori atunci depăşirea acestui volum înseamnă tocmai un număr ridicat de informaţii sosite la controlorul de zbor.

Totuşi a fost necesar să legăm frecvenţa erorilor de cantitatea de informaţii stocate în memoria pe termen scurt şi în acest scop a fost necesar să obţinem numărul de informaţii memorate. S-a observat că timpul de stocare a unei informaţii a fost repartizat aproximativ exponenţial cu media de 4,71 min. Prin urmare, creşterea şi descreşterea volumului de informaţii memorate poate fi privită ca un proces

de naştere şi moarte, după cum urmează : 1) intensitatea naşterilor nulă; 2) imigraţia : aleatoare, intrări independente cu media v pe minut; 3) intensitatea de moarte : aleatoare, independentă cu media *[iN,* unde mărimea populaţiei este *N.*

Cititorul va remarca că acest model de naştere şi moarte este un caz particular al celor mai simple modele de aşteptare, cu mai multe staţii de servire, anume este Jf/lf/oo : (oo/FIFO) — un model cu un număr infinit de staţii de servire. în starea stabilă, repartiţia numărului de clienţi existenţi în sistem este Poisson, cu media v/p.. (în momentul în care am întreprins cercetările, nu am gîndit în termenii

unor modele cu o infinitate de staţii de servire şi am obţinut soluţia prin alte metode).

Trebuia acum să determinăm un standard de toleranţă pentru erori. S-a hotărît, destul de arbitrar, ca nivelul tolerabil al erorilor să fie 1%; aceasta corespundea unui număr de două informaţii pe minut memorate pe termen scurt. Nu toate mesajele erau independente între ele, unele avînd acelaşi conţinut, iar altele servind pentru precizarea unor mesaje anterioare. De exemplu, a apărut o serie de 14 mesaje toate în legătură cu un acelaşi incident petrecut cu un avion în curs de decolare.

S-a estimat că în medie ar fi aproximativ 1,6 informaţii cu acelaşi conţinut în memorie Numărul de conţinuturi memorate, corespun- zînd unui nivel de eroare admis de 1% a fost în medie 5,88. Aceasta poate fi interpretată astfel: capacitatea efectivă a memoriei controlorului de zbor era de aproximativ şase conţinuturi simultan. Evident că uneori se poate întîmpla ca memoria să conţină 10 sau 11 conţinuturi simultan. Aceasta a fost o metodă foarte aproximativă, empirică, de determinare a cantităţii de informaţie ce urmează a fi stocată în memoria controlorului de zboruri. Ea reprezintă un ghid pentru deciziile ulterioare.

Fără îndoială că, din punctul de vedere al exactităţii, controlorul de zbor era supraîncărcat în perioadele de vîrf, atîta timp cît două informaţii pe minut în memoria pe termen scurt este echivalent cu 2,86 pe minut în total, şi aceasta corespunzînd unei ocupări de circa 65 % a controlorului de zbor cu prelucrarea acestor informaţii, în condiţiile noului sistem, cu un număr mai redus de informaţii de prelucrat, situaţia a fost uşor îmbunătăţită. A apărut însă evident că aceasta nu reprezenta decît o soluţie de compromis. Analizele statistice privind frecvenţa mesajelor au arătat că, în condiţiile noului sistem, numărul de mesaje prelucrate pe zbor este proporţional

 cu numărul zborurilor ce urmează să decoleze în ora următoare şi egal cu 9,5 mesaje pe zbor (repartiţia nu a fost binomială). Se ştia că numărul avioanelor ce urmau să decoleze în ora de vîrf de dimineaţa, în perioada verii anului 1960, era de aproximativ 22, astfel încît timpul mediu necesar a prelucra mesajele în această oră de vîrf era de

22x9,5x0,23 = 48,1 min. Aceasta ar reprezenta o ocupare medie de circa 80 %, în întregime format din mesaje ce necesită luarea unei decizii. O singură persoană nu ar putea face faţă acestei munci, de aceea ar trebui făcută o împărţire a ei între două persoane. Am fost puşi în faţa unei probleme speciale : să ne imaginăm un mijloc de reducere a informaţiilor stocate pe termen scurt şi un mijloc de a stoca aceste informaţii astfel încît doi controlori de zbor să poată avea acces la ele simultan. în mod experimental am imaginat un display‡‡‡‡‡‡ care era un mijloc foarte eficient de îmbunătăţire a sistemului de memorare pe termen lung şi în acelaşi timp capabil să reţină şi informaţiile pe termen scurt. Se părea însă că nu exista nici o modalitate de prezentare a datelor pe termen scurt care să permită celor doi controlori Să le citească şi să modifice fără un sistem de intercomunicare destul de complicat. Analizele făcute asupra datelor pe termen scurt colectate pe parcursul primelor faze ale studiului au relevat faptul că două persoane vor reuşi doar să lucreze la 1,6 ori capacitatea unuia singur. Prin urmare, în 1960 intensitatea efectivă a traficului pentru fiecare controlor de zbor nu va fi 0,40, ci 0,50. Graficele pentru Jf/Jf/2 : (oo/SIRO) arată că pentru p = 0,5 aproximativ un mesaj din 12 va fi prelucrat fntîrziat cu mai mult de 0,5 min.

Această valoare a fost considerată ca neacceptabilă. Devenise evident că se impunea o divizare a responsabilităţilor între cei doi controlori de zbor, care să le reducă necesităţile de intercomunicare. O asemenea diviziune a fost stabilită, odată cu un sistem de vizualizare a informaţiilor. Teoria aşteptării nu a fost utilizată în aceste faze finale ale sistemului, aşa încît nu le vom acorda atenţie.

Ar fi poate interesant de menţionat faptul că sistemul de control rezultat din acest studiu a rămas neschimbat pînă în 1961. Atunci au fost efectuate o serie de modificări minore,

---

‡‡‡‡‡‡ **Dispozitiv de vizualizare a rezultatelor pe un ecran, asemănător televizorului. (A'.T.)**

care au avut ca rezultat o creştere a capacităţii. în momentul cînd scriu această carte, sistemul astfel modificat continuă să funcţioneze satisfăcător.

15

O- PROBLEMĂ A STANDARDELOR DE SERVIRE

Oficiile pentru rezervarea locurilor pentru cursele aeriene reprezintă primul contact direct al companiei cu posibilii clienţi; de aceea trebuie să se asigure standarde minime de servire. Aceste standarde sînt de două tipuri: acelea care sînt legate de modul în care angajaţii, răspunzînd la apelurile telefonice, ascultă şi înregistrează dorinţele clienţilor şi cele legate de întîrzierile posibile ce pot să apară în încercarea clienţilor de a vorbi cu un angajat. Acestea din urmă pot fi măsurate suficient de corect şi sînt determinate aproape în întregime de numărul agenţilor şi de natura instalaţiei telefonice. Atîta timp cît sînt implicate oficiile de rezervări telefonice de locuri, două standarde sînt relevante; anume cel care se referă la proporţia apelurilor respinse datorită blocării tuturor liniilor telefonice şi cel care se referă la proporţia apelurilor ce trebuie să aştepte mai mult decît o perioadă specificată de timp. Ceea ce se găseşte sub controlul direct al companiei este numărul de linii telefonice instalate şi numărul de angajaţi la oficiile de rezervare a locurilor, care le manevrează, în 1961, conducătorul departamentului de analiză a încasărilor de la Compania Air Canada i-a cerut lui H.J.G. Whitton de la departamentul de cercetări operaţionale să realizeze un studiu asupra relaţiilor existente între numărul de linii telefonice şi numărul angajaţilor, pe de o parte, şi frecvenţa apelurilor respinse şi repartiţia timpului de aşteptare, pe de altă parte. Studiul trebuia să cuprindă toarte oficiile de rezervări de locuri ale Companiei Air Canada şi trebuia să ia în considerare o mare varietate a frecvenţelor de intrare şi a repartiţiilor timpului

de servire. Obiectivele acestui studiu erau următoarele :
1. Să permită conducătorilor de oficii de rezervări de locuri să estimeze mai precis numărul necesar de linii şi de angajaţi, pentru a face faţă volumului de apeluri de la oficiile lor, menţinînd un standard de servire corespunzător, măsurat de numărul apelurilor care aşteaptă.
2. Să obţină din rezultatele acestei prime faze o tehnică de calcul a cerinţelor totale de forţă de muncă pentru oficiile de rezervări de locuri, ţinînd cont de schimburile agenţilor, de concedii, zile de odihnă etc.
3. Să determine cea mai bună organizare în cadrul oficiilor de rezervare de locuri.

15.1. PRIMA FAZĂ

Primul lucru pe care l-a făcut Whitton a fost să observe operaţiile efectuate în cadrul unor oficii, pentru a aprecia modul de organizare, în această apreciere făcută, el scrie :

„Un sistem de rezervare de locuri constă dintr-o combinaţie a cîtorva procese simple fundamentale, fiecare putînd fi rezumat astfel. în momentul în care un client face apelul, el poate fi admis în sistem doar dacă una din liniile telefonice este liberă : dacă este admis, el vorbeşte cu un angajat, fie printr-un dispozitiv automat, fie printr-un procedeu de comutare manuală (în acest caz apelul va trebui să aştepte pînă cînd operatorul îl comută). în orice caz, apelul trebuie să aştepte pînă cînd un angajat este capabil să îl preia. Atunci cînd conversaţia a luat sfîrşit, linia ocupată este eliberată automat dar angajatul poate cere o perioadă suplimentară, pentru a-şi completa înregistrările, etc. Sistemele studiate constau dintr-un număr de astfel de sisteme simple, cu diferite tipuri de apeluri, recepţionate prin diferite combinaţii de linii, fiind dispecerizate în sistem printr-una din cele două metode mai importante. Alternativele posibile pentru fiecare fază a sistemului sînt prezentate în tabel.

Tabelul la care se face referirea este în această carte tabelul 15.1. Whitton continuă :

Majoritatea oficiilor primesc apeluri de tipurile

prezentate în prima coloană a tabelului, dar în timp ce la anumite oficii mici toate

rezervările pot fi recepţionate la un singur grup de linii telefonice, în oficiile mai mari pot să existe grupuri separate pentru public, pentru intermediari, pentru apeluri speciale, sau pentru informaţii

Tabelul 15.1

Diferite tipuri de apeluri şi angajaţi şl metodele posibile de repartizare a apelurilor

Tipuri de apeluri recepţionate	Grupuri posibile de linii	Metode de repartiţie a apelurilor către angajat!	Tipuri de angajaţi
Apeluri de rezervări (i) de la public	**Linii publice de rezervări**	**Tablou de distribuţie manual**	**Pentru rezervări interne**
(ii) de la intermediari	**Linii speciale pentru intermediari**	**Distribuitor automat**	**Pentru rezervări internaţionale**
(iii) surse speciale	**Linii pentru reconfirmare**	**Direct la angajaţi (in oficiile mici)**	**Pentru apelurile intermediarilor**
Apeluri de reconfirmare	**Linii pentru anunţarea sosirilor avioanelor**		**Pentru diferite a- peluri speciale**
Apeluri pentru informaţii legate de orarul avioanelor	**Linii administrative**		**Pentru apelurile legate de sosirile**
Apeluri administrative			

legate de sosirea avioanelor. Liniile pentru reconfirmare pot sau nu să fie separate. Angajaţii din oficiu pot fi grupaţi în diferite moduri — poate să existe un grup de angajaţi atît în apelurile internaţionale cît şi în cele ale intermediarilor (sau

în apeluri speciale), sau pot exista angajaţi separaţi, doar pentru apelurile internaţionale. Gruparea angajaţilor are un rol important în eficacitatea oficiilor (tratate independent) datorită faptului că în perioadele de vîrf angajaţii unui grup pot să se suplinească unul pe altul”.

Următorul pas era de a analiza datele ce erau disponibile. Posibilităţile de a strînge date speciale erau foarte limitate, in schimb era disponibilă o mare cantitate de informaţie înregistrată la oficiile de rezervare a locurilor. Aceasta includea :

1. Numărul de apeluri acceptate pe oră, din categoria rezervărilor publice.
2. înregistrări ale duratelor convorbirilor clienţilor cu operatorii de la tabloul de distribuţie, adică timpii de servire ai operatorilor.
3. înregistrări ale duratelor convorbirilor clienţilor cu angajaţii de la oficiul de rezervări: timpii de servire ai angajaţilor.

în plus s-au făcut măsurări asupra :

4. Timpilor necesari angajaţilor pentru înregistrări, după încheierea convorbirilor cu clienţii.

Frecvenţele orare ale apelurilor posedă o caracteristică clară, anume modul de repartiţie a lor în cursul unei zile.

Figura 15.1 arată un astfel de mod de repartiţie, care este aproximativ acelaşi în toate zilele săptămînii, cu excepţia dispariţiei celor

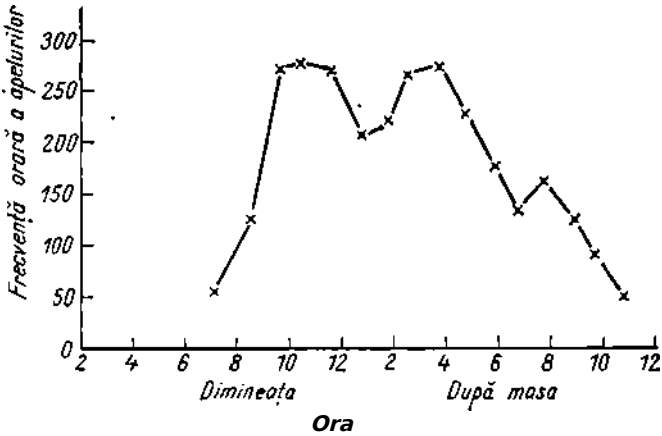


Fig. 15.1. Variaţia frecvenţei orare a apelurilor intr-o zi tipică (in Juna mai 1959).

două vîrfuri în zilele de sîmbătă şi duminică. în plus, există anumite variaţii ale numărului de apeluri de la o zi la alta, în cursul săptămî- nii, şi în plus există acele tendinţe anuale şi sezoniere care au constituit de multă vreme sursa principală a cîştigurilor companiilor aeriene.

Existenţa acestor variaţii înseamnă că este practic imposibil să găsim ore reprezentative, ce ar putea fi considerate ca selecţii din aceeaşi populaţie. Datele nu pot fi folosite pentru a indica dacă repartiţia apelurilor este sau nu Poisson. Nu se pot efectua observaţii directe asupra intervalelor dintre apeluri, astfel încît a trebuit să se considere că repartiţia acestor intervale este exponenţială (aşa cum se obişnuieşte dealtfel în telefonie).

într-un oficiu, în care era un tablou de distribuire manual, timpul de manevrare a unui apel de către operator are o repartiţie lognor- mală cu vîrful la 4 s şi media de 6 s. Observaţiile au arătat că diversele tipuri de apeluri aveau durate diferite, variind în medie de la 90 la 200 de secunde. Formele repartiţiilor erau foarte asemănătoare

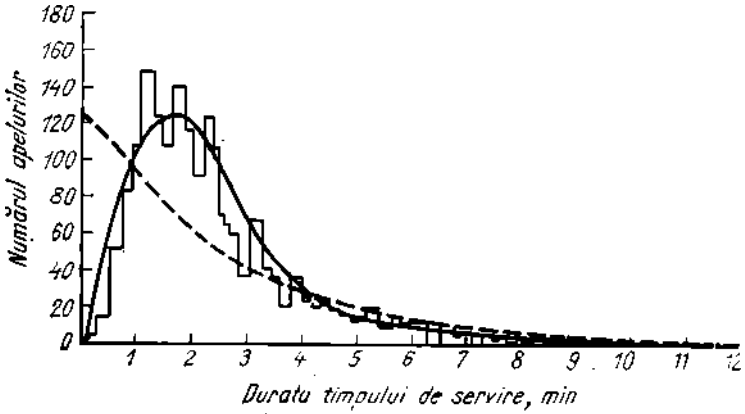


Fig. 15.2. Repartiţia timpilor de servire ai angajaţilor unui orificu de rezervări de locuri pentru public:----------exponenţială; ----------lognormală.

în jurul mediilor. Figura 15.2 prezintă una dintre aceste repartiţii, împreună cu repartiţiile exponenţială şi lognormală corespunzătoare datelor observate.

Whitton a ajustat datele şi cu o repartiţie Pearson de tip III, dar aceasta, care nu este reprezentată în figură, era apropiată de cea exponenţială. Deşi repartiţia lognormală părea că aproximează bine datele observate, totuşi testul x^2 a contrazis acest lucru ($/^2$ = 83,08 cu 44 grade de libertate). Totuşi, probabil că este destul de dificil să găsim o formă mai bună şi în plus trebuie să ţinem seamă de particularităţile muncii fiecărui angajat. Aşa că am folosit repartiţia lognormală în calculele ulterioare fără prea multe ezitări.

în 80% din cazuri, angajaţii nu au nevoie de timp suplimentar la sfîrşitul unei convorbiri, dar cînd există şi astfel de situaţii, timpii corespunzători sînt repartizaţi din nou lognormal cu media 1,75 min.

La acest punct, Whitton a luat în considerare diferitele modalităţi în care putea analiza diversele sisteme de aşteptare complexe cu care era confruntat. El arată :

„Caracterul neexponenţial al repartiţiei timpilor de servire şi lipsa unor date despre repartiţia apelurilor

înseamnă că orice rezultat dedus din teoria exponenţială a aşteptării va fi îndoielnic. Această observaţie, cuplată cu faptul că ecuaţiile ar fi extrem de complicate pentru orice versiune nesimplificată a sistemului, ne conduce la concluzia folosirii simulării cu ajutorul unui calculator electronic. Aceasta nu înseamnă că posibilitatea obţinerii unor rezultate teoretice este respinsă în întregime; se speră că aproximări satisfăcătoare bazate pe teorie să fie în continuare posibile, dar se consideră că ele nu ar fi putut fi obţinute rapid şi utilizabil. Rezultatele numerice cerute puteau fi obţinute printr-o simulare relativ simplă, dar problemele legate de dirijarea diferitelor tipuri de apeluri etc. puteau fi studiate doar dacă simularea reproducea funcţiile esenţiale ale sistemului real. De aceea, simularea a fost făcută cît mai aproape de realitate.”

15.1.1. SIMULAREA

în descrierea simulării oficiilor de rezervare de locuri Whitton a scris următoarele :

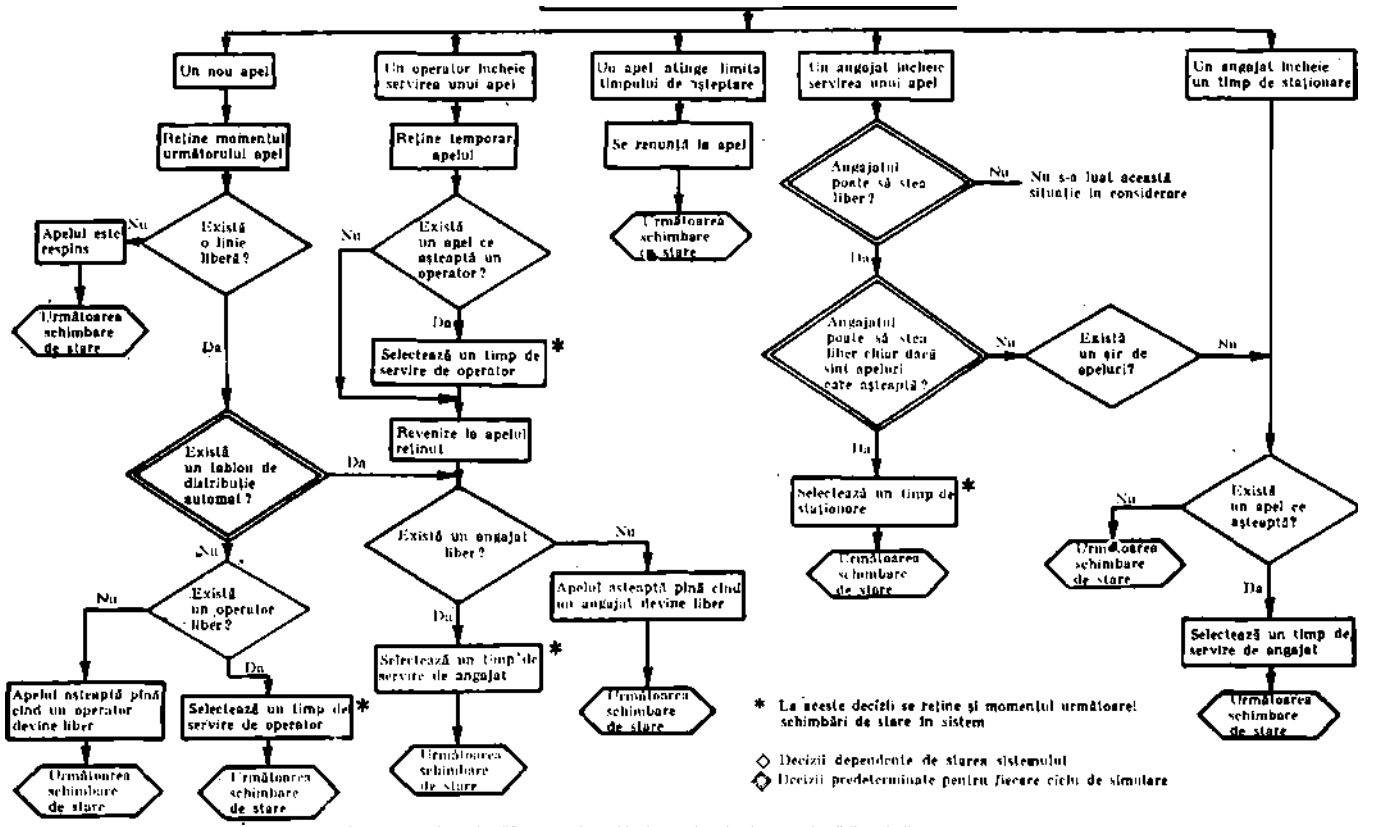
„Metoda simulării se bazează pe faptul că evoluţia unui apel printr-un sistem real poate fi vizualizată ca o serie de mutări dintr-o stare în alta, apelul fiind în fiecare stare un interval finit de timp. Dacă un apel este acceptat, acesta ajunge la tabelul de distribuţie şi intră într-una din cele două stări — este servit imediat sau trebuie să aştepte, dar în fiecare caz trece un interval de timp înaintea schimbării stării sale. Aşadar, simularea constă într-o procedură care să ne asigure că modificările de stare a tuturor apelurilor din sistem sînt corect sincronizate : modificările de stare sînt însoţite de secvenţe logice, proiectate pentru a corespunde, pe cît posibil, operaţiei din sistemul real.

Metoda de sincronizare folosită este o trăsătură de bază a simulării avînd un efect major asupra timpului de calcul necesar obţinerii rezultatelor. Metoda cea mai cunoscută presupune verificarea fiecărui apel la sfîrşitul fiecărei unităţi de timp simulate, pentru a determina ce modificări de stare

au apărut în intervalul considerat : în cazul nostru intervalele între modificările de stare erau relativ lungi comparativ cu unitatea de timp utilizată şi astfel s-a considerat că simularea ar dura mai puţin dacă s-ar realiza pe baza trecerii de la o stare de alta (adică să se utilizeze metoda „duratei minime"). Momentele la care apar modificări de stare sînt reţinute în memorie în ordine cronologică, iar atunci cînd procesul de simulare a ajuns la sfîrşitul unei secvenţe logice, contorul de timp este deplasat la momentul următoarei modificări de stare înregistrate şi o nouă secvenţă logică va începe. Acest proces este ilustrat în fig. 15.3, care prezintă forma simplificată a schemei logice ce apare în procesul simulării sistemului de rezervări telefonice pentru zboruri interne. Pentru simplificare, schema logică exclude toţi paşii care presupun ajustări şi nu se arată conexiunile cu celelalte părţi ale întregului sistem. Oricum, se arată modul în care toate secvenţele logice trebuie să conducă la alegerea următoarei modificări de stare şi deci la următoarea secvenţă.

In capitolul referitor la tehnicile de simulare am analizat pe scurt trei operaţii necesare în simularea modelelor de aşteptare : generarea numerelor aleatoare, producerea sosirilor clienţilor şi a timpilor de servire. Remarcăm că în multe cazuri nu sînt necesare numere aleatoare veritabile. Acest lucru s-a întîmplat şi în cercetările întreprinse de Whitton. Legat de aceste trei aspecte majore ale simulării el spune :

„Numerele aleatoare sînt necesare foarte frecvent în simulare şi ele sînt generate de un proces multiplicativ congruenţial. Pentru acest


Un nou apel
Reține momentul următorului apel
Există o linie liberă?
Nu
Apelul este respins
Următoarea schimbare de stare
Da
Există un tablou de distribuție automat?
Da
Nu
Există un operator liber?
Nu
Da
Apelul așteaptă până când un operator devine liber
Următoarea schimbare de stare
Selectează un timp de servire de operator *
Următoarea schimbare de stare
Un operator încheie servirea unui apel
Reține temporar apelul
Există un apel ce așteaptă un operator?
Nu
Da
Selectează un timp de servire de operator *
Revenire la apelul reținut
Există un angajat liber?
Nu
Da
Apelul așteaptă până când un angajat devine liber
Următoarea schimbare de stare
Selectează un timp de servire de angajat *
Următoarea schimbare de stare
Un apel atinge limita timpului de așteptare
Se renunță la apel
Următoarea schimbare de stare
Un angajat încheie servirea unui apel
Angajatul poate să stea liber?
Nu
Nu s-a luat această situație în considerare
Da
Angajatul poate să stea liber chiar dacă sînt apeluri care așteaptă?
Nu
Există un șir de apeluri?
Nu
Da
Selectează un timp de staționare *
Următoarea schimbare de stare
Un angajat încheie un timp de staționare
Există un apel ce așteaptă?
Nu
Următoarea schimbare de stare
Da
Selectează un timp de servire de angajat
Următoarea schimbare de stare
* La aceste decizii se reține și momentul următoarei schimbări de stare în sistem
◇ Decizii dependente de starea sistemului
◇ Decizii predeterminate pentru fiecare ciclu de simulare

Vig. 15.3. Versiune simplifica!:! a schemei loRice penlrtt simularea prelucrării apelurilor

tip de proces este ales un multiplicator *p,* iar numerele aleatoare succesive sînt obţinute din relaţia

$$u?_{n+}i = pa?_{\text{„}}(\text{mod } P),$$

unde x_0 este numărul aleator iniţial. în cazul nostru multiplicatorul a fost ales $3^{1'}$ (adică de forma 3^{4*+1}), iar *P* a fost luat 8. Acest multiplicator dă cicluri de lungime maximă şi va produce 5 x 10® numere distincte înaintea de primă repetare (este puţin probabil ca să fie utilizate mai mult de 100 000 numere aleatoare, într-un ciclu normal de simulare). Se presupune că apelurile sosesc la intervale exponenţiale, care pot fi generate de procedura realizată de von Neumann, descrisă în cap. *7.* Timpii de servire sînt obţinuţi într-o manieră convenţională. Se memorează un tabel al funcţiei de repartiţie *F(z)* a acestei variabile aleatoare *z*; se consideră un număr aleator *x* şi se caută în tabel cea mai mică valoare *z* pentru care *P(z} x.* Dacă funcţia de repartiţie *F{z)* ar fi avut o formă mai prelucrabilă decît longnormală, atunci am fi putut folosi o metodă similară cu cea prezentată în cap. 6".

Intrările simulate în oficiul de rezervare de locuri erau de două tipuri : valori numerice date parametrilor şi indicative care codifică organizarea oficiului studiat, în concordanţă cu o anumită clasificare, Aceste intrări pot fi rezumate în următoarea listă. Valorile numerice cerute erau :

1. Frecvenţele orare ale :

apelurilor pentru rezervări de locuri pe liniile telefonice pentru public;

apelurilor pentru rezervări sosite pe alte linii;

apelurilor de reconfirmare;

apelurilor de la intermediari;

apelurilor speciale;

apelurilor pentru comunicarea de informaţii legate de sosirile avioanelor;

apelurilor administrative.

2. Numărul de linii pentru : rezervări telefonice pentru public; rezervări pentru alte categorii; reconfirmare;

apeluri de la intermediari;

apeluri speciale;
apeluri administrative.

3. Numărul de operatori şi repartiţia timpului de servire a operatorilor la tabelul de distribuţie.

4. Numărul de angajaţi necesari pentru : apeluri interne de rezervări;
apeluri interne şi internaţionale; apeluri de la intermediari;
apeluri speciale;
apeluri pentru informaţii legate de orarul avioanelor, împreună cu repartiţiile timpilor de servire corespunzători.

5. Repartiţia timpilor necesari angajaţilor pentru a face înregistrări etc.

6. Timpul maxim de aşteptare permis (dacă se cere).

7. Timpul standard de aşteptare.

8. Numărul aleator iniţial şi multiplicatorul cerut.

9. Numărul de apeluri pentru rezervări odată cu care se va termina simularea.

Chestiunile de organizare a oficiului erau :

10. Există un tablou de distribuţie automat?

Apelurile de la intermediari sau cele speciale pot ajunge direct la angajaţi?

Există linii speciale pentru apelurile pentru informaţii legate de sosirile avioanelor ?

Aceste apeluri ajung direct la angajaţi ?

Apelurile internaţionale sînt rezolvate de către angajaţi sau de angajaţi speciali ?

Se acordă un interval de timp pentru transferul unui apel ?

Un angajat îşi poate permite un timp suplimentar, după încheierea unei convorbiri ?

Există un timp maxim de aşteptare ?

Ieşirile produse prin simulare, după analiza numărului de apeluri prevăzute iniţial, iau următoarea formă :

Numărul de apeluri recepţionate 1 tru fiecare ti de t
şi numărul de apeluri respinse J
Procentajul de utilizare pentru fiecare grup de linii
pentru operatori pentru fiecare tip de angajat

Lungimea medie şi maximă a şirului, pentru fiecare staţie de servire :

Procentul de apeluri ce aşteaptă 1 pentru fiecare ti de d mai mult decît timpul standard J

15.1.2. APLICAŢIE A SIMULĂRII

După cum am văzut în cap. 6, simulările pot da forme variate de distorsionări. Cauzele acestor devieri erau posibilele erori în reprezentarea logică a sistemului şi insuficienta atenţie acordată culegerii datelor. Ambele pot produce perturbaţii şi imprecizie. în plus, imprecizia poate fi, ca de obicei, cauzată de caracterul aleator al procesului de simulare.

Cea mai cunoscută metodă de control al perturbaţiilor este de a compara rezultatele ciclurilor de simulare cu observaţiile operaţiilor reale. Fără îndoială, aceasta este greu de realizat. Atîta timp cît variabilitatea şi imprecizia constituiau problemele majore, era mai întîi necesar ca fiecare ciclu de simulare să fie suficient de lung pentru a asigura ca rezultatele finale să corespundă stării stabile.

Această problemă a fost cercetată prin realizarea unei serii de teste, în care programul a fost modificat astfel încît a afişat rezultatele cumulate, la sfîrşitul fiecăror 100 de apeluri recepţionate simulate. Unele din rezultatele obţinute sînt prezentate în fig. 15.4,

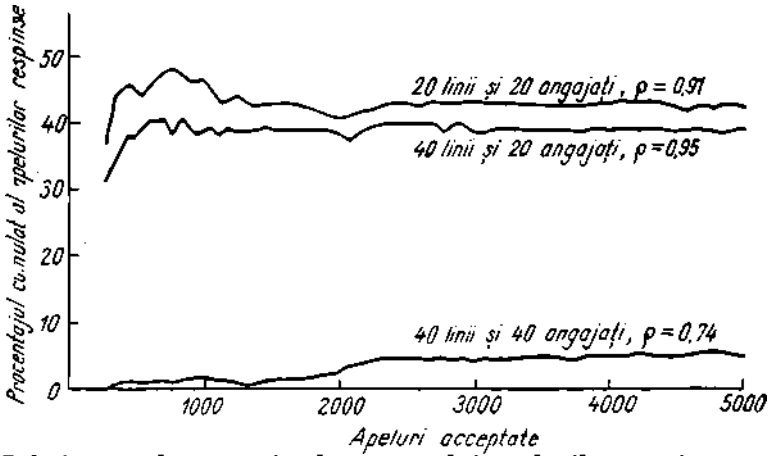


Fig. 15.4. Aspectul progresiv al procentului apelurilor respinse (intensitatea intrărilor = 600 apeluri/h).

unde procentajul cumulat al apelurilor respinse este expus comparativ cu numărul de apeluri recepţionate într-un sistem în care apelurile străbat tabloul de distribuţie pentru a ajunge la angajaţi (adică cu două faze de servire, în serie).

Testele au arătat că procentul de apeluri respinse atinge regiunea valorii stării stabile după prelucrarea a circa 1000 de apeluri simulate, dar fluctuaţiile în jurul acestei valori se menţin pînă la circa 3000 de apeluri. Modificările ce apar pînă la atingerea valorii stării stabile nu urmează un tipar coerent. Probabilitatea unei întîrzieri avea cam acelaşi aspect în starea de tranziţie atunci cînd numărul de linii era identic cu numărul angajaţilor, dar atunci cînd există mai multe linii decît angajaţi, probabilitatea unei întîrzieri se modifică foarte lent şi exponenţial spre valoarea stării stabile.

Pentru a asigura un grad ridicat de precizie aproximaţiilor valorilor stării stabile, ciclurile de simulare au fost continuate pentru cel puţin 3000 de apeluri.

Tabelul 15.2 prezintă mărimea variaţiilor aleatoare la care ne putem aştepta, rezultate obţinute prin simulare. Pentru fiecare situaţie, ultimele coloane conţin procentul de apeluri respinse obţinut

Tabelul 15.2

Distribuitor automat	**20**	**36,2**	**37,5 i 37,0**
	40	**1,8**	**1,2 i 2,2**
Tablou de distribuţie	**20**	**38,3**	**40,5 37.0**
	40	**2,2**	**3,0 ’ 1,8**

Variaţiile aleatoare ale procentului apelurilor respinse

Metoda de distribuire a apelurilor	**Numărul angajaţilor**	**Apelurile respinse %**

în trei cicluri de simulare, care diferă doar prin alegerea numărului aleator iniţial. Toate rezultatele se referă la o frecvenţă a intrărilor de 600 de apeluri pe oră, 40 de linii telefonice, un timp mediu de servire al unui angajat de 3 min; în cazul ultimelor două situaţii se consideră un tablou de distribuţie manual cu trei operatori, avînd un timp mediu de servire de 6 s.

Aceste variaţii sînt suficient de mici comparativ cu modificările ce apar în cazul unor alterări ale parametrilor de intrare (de exemplu ale numărului de linii sau de angajaţi), şi astfel un număr mare de cicluri de simulare nu şi-ar avea rostul decît în cazuri cu totul excepţionale.

In zona de interes (aproximativ 15 % de apeluri respinse), la un nivel de semnificaţie de 95 %, limitele de încredere ale rezultatului unui singur ciclu de simulare vor fi de aproximativ *±2 %.* ” Variaţia procentului apelurilor care aşteaptă mai mult decît timpul standard este de aceeaşi mărime.

15.1.3. REZULTATE OBŢIUNTE PRIN SIMULARE

Pentru diferite valori ale frecvenţelor intrărilor, ale numărului de linii telefonice, de angajaţi etc., prin simulare se produc valori ale procentului de apeluri respinse şi procentului de apeluri ce aşteaptă o perioadă mai mare decît limita specificată. Pentru a estima numărul de linii şi angajaţi necesari, a asigura o servire standard pentru orice frecvenţe ale intrărilor, primul pas a fost realizarea unei serii de cicluri de simulare care să acopere regiunea de interes. Rezultatele acestor cicluri de simulare sînt prezentate în fig. 15.5 şi se referă la un anumit oficiu în care

apelurile pentru rezervăii străbă- teau un tablou manual de distribuţie pentru a ajunge la angajaţi. Curbele sînt specifice sistemelor de aşteptare cu mai multe staţii de servire; ele arată că există de obicei o regiune critică legată de numărul de angajaţi (standardul specificat de companie părea să cadă în această regiune). Familia de curbe, pentru valori ridicate ale intrărilor, prezintă efectul limitării dimensiunilor şirului de aşteptare (adică a numărului de linii telefonice). Dacă numărul de linii telefonice creşte, procentul de apeluri respinse va scădea şi curbele vor avea un aspect aparte; dacă numărul de angajaţi nu va creşte, atunci timpii de aşteptare ai apelurilor acceptate vor fi mai lungi.

Au fost realizate şi curbele pentru procentul de apeluri respinse. Acestea arată că (pentru un număr fixat de linii), odată cu creşterea frecvenţe' intrărilor, devine imposibil să se reducă procentul de apeluri respinse sub o anumită valoare. Dacă această valoare este mai ridicată decit standardul, singura modalitate de a atinge standardul este de a creşte numărul de linii telefonice şi deci numărul de angajaţi.

Estimaţii privind numărul de linii şi de angajaţi, necesari în diferite oficii de rezervare, pot fi obţinute în mod asemănător. S-a remar

cat totuşi, că tabelele au o utilitate practică mai mare decît o au graficele de tipul celui din fig. 15.5, de aceea s-a hotărît completarea unor tabele, ce vor fi larg răspîndite.

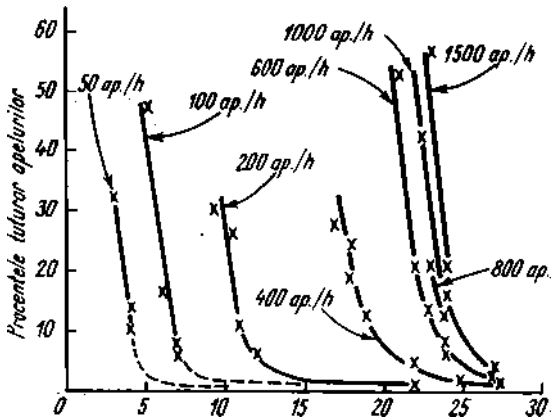


Fig 15.5. Procentele tuturor apelurilor de rezervare ce aşteaptă mai mult de 0,5 min pentru diverse frecvenţe de apeluri şi numere de angajaţi (rezultate obţinute prin simulare).

Tabelele vor da şi pentru cazurile în care rezultatele simulării arată o utilizare a angajaţilor în proporţie > 70 %, numărul de angajaţi necesari pentru o utilizare mai puţin obositoare.

O variabilă pe care nu am discutat-o încă este timpul mediu de servire al angajaţilor. Acesta poate să difere de la un oficiu la altul, dar a trebuit să fie conţinut în tabele. Efectul modificărilor acestei variabile a fost punctul central al cercetărilor efectuate în legătură cu introducerea sistemului electronic de rezervare. S-a sugerat că introducerea acestui sistem va afecta timpul necesar unui angajat pentru a trata cu clientul. Aceasta ar fi putut fi adevărat, astfel că problema a fost cercetată iar rezultatele acestor cercetări, realizate la un oficiu cu tablou de

distribuţie automat, sînt prezentate în tabelul 15.3.

Tabelul 15.3

Efectul variaţiei timpilor medii de servire asupra numărului de linii şi angajaţi

Timpul mediu de servire (min)	**1.5**	**2**	**3**	**4**
NumArul necesar de linii In orele de vîrf	**19**	**24**	**33**	**40**
Apeluri pe oră	**Numărangajaţilo ulr**			
200	**10**	**12**	**15**	**17**
400	**20**	**25**	**33**	**41**
600	**24**	**33**	**45**	**56**

Numărul de linii a fost astfel ales, încît procentul de apeluri respinse să nu depăşească standardul în orele de vîrf; acelaşi număr de linii a fost utilizat pentru două frecvenţe mai scăzute ale intrărilor. Numărul angajaţilor a fost dat de rezultatele simulărilor, ajustate pentru a înlătura o utilizare mai mare de 70%.

15.1.4. COMPARAŢII CU TEORIA AŞTEPTĂRII

Whitton a tras concluzia, corectă dealtfel, că o continuare ce constă dintr-un număr mare de cicluri de simulare, producînd volume imense de date, nu era cea mai bună soluţie. El a considerat că dacă se putea găsi o cale de utilizare a modelelor teoretice existente pentru a produce aceleaşi rezultate ar fi mult mai bine chiar dacă de fapt aceste modele diferă foarte mult în structura lor de ceea ce se întîmplă în oficiile de rezervare de locuri. De aceea, el a realizat o comparare a rezultatelor obţinute în cîteva cicluri de simulare cu cele rezultate din unele modele matematice. Vom continua prezentarea acestui stadiu al primei faze cu propriile sale cuvinte.

„Cel mai simplu sistem de aşteptare cuprins în sistem este unul în care apelurile sosesc aleator şi sînt tratate în ordinea sosirii de către oricare dintre angajaţi, dimensiunea

şirului de aşteptare fiind limitată de numărul fix de linii telefonice. Dacă timpii de servire sînt presupuşi a fi repartizaţi exponenţial, atunci pot fi obţinute valorile teoretice pentru diferite statistici utile, prin metode standard.

Valorile deduse dintr-un astfel de sistem vor fi valabile numai pentru tipul cel mai simplu de oficiu, în care apelurile ajung direct la angajaţi, fără a trece printr-o fază intermediară de aşteptare la

tabloul de distribuţie. Cele mai multe oficii însă au tablouri de distribuţie, astfel că cea mai evidentă generalizare a unui sistem simplu constă în introducerea unui al doilea stadiu de servire, adică următorul sistem ce trebuie luat în consideraţie este un sistem ce conţine două faze în serie, fiecare cu mai multe staţii de servire, cu o limitare superioară a numărului de apeluri acceptate în sistem. Formulele aplicabile unui astfel de sistem nu pot fi găsite în literatură, dar dificultăţile legate de deducerea lor sînt numai algebrice.

Cea mai facilă ilustrare a modului în care expresiile teoretice corespund rezultatelor simulării constă într-o comparaţie a estimaţiilor procentului de apeluri respinse. O astfel de comparaţie poate fi făcută cu ajutorul următorului tabel, care dă estimaţiile acestor procente pentru o frecvenţă a intrărilor de 600 apeluri pe oră, cu 40 de linii telefonice şi un timp mediu de servire de 3 min pentru sistemele cu o singură fază şi respectiv timpii medii de servire de 6 s şi respectiv 3 min pentru sistemele formate din două faze (tabelul 15.4). Diferen-

Tabelul 15.4

Comparaţie a estimaţiilor teoretice ale procentului de apeluri respinse, cu estimaţiile produse prin simulare

NumArul fazelor	Numărul	Estimarea teoretlcA	Estimarea prin simulare (media a trei cicluri)
1	1 20	33,3	36,9
	i	1,4	1,8
	• Prima fază doua		
	2 20	33,3	38,6
2	2 40	2,2	2,3

ţele ce apar în cele două cazuri cu 40 de linii şi 20 de angajaţi sînt prea mari pentru a fi atribuite în întregime variaţiilor aleatoare : acestea ar putea fi cauzate fie de caracterul nexeponenţial al repartiţiilor timpului de servire, fie de caracterul prea grosolan al teoriei. Repartiţiile teoretice ale timpului de aşteptare pentru cazul cu o singură fază au aceeaşi formă cu cele produse prin simulare (adică acelaşi grad de asimetrie) dar valorile medii ale celor două tipuri de repartiţie diferă. Şi aici probabil că o îmbunătăţire a teoriei ar putea furniza aproximaţii mai bune".

15.1.5. SFÎRŞITUL PRIMEI FAZE

în acest moment, Compania Air Canada posedă o simulare care va arăta, pentru diferite frecvenţe de intrare repartiţii ale timpului de servire şi regula FIFO a disciplinei de aşteptare, numărul de linii telefonice şi de angajaţi, procentul de apeluri respinse şi procentul de apeluri acceptate, care trebuie însă să aştepte mai mult decît un timp specificat. Simularea a fost programată pentru un calculator IBM 7070. în 1962 au fost simulate un număr mare de cicluri pentru a reprezenta unul din cele mai mari oficii de rezervări de locuri ale companiei. Acest sistem utilizează un tablou de distribuţie automată, cu acces direct, şi este completat cu circuite automate care asigură o perfectă regulă FIFO a disciplinei de aşteptare. în urma ciclurilor de simulare s-au completat cîteva tabele.

Imediat după ce aceste tabele au fost completate, s-a efectuat o reorganizare în cadrul companiei. Scopul acestor modificări a fost realizarea unei mai bune funcţionări în faţa cererii crescînde. Ca rezultat, Whitton, a cărui experienţă pentru sistemele de mari dimensiuni era considerabilă, a primit noi responsabilităţi, iar legătura sa cu proiectul pe care-1 discutăm a fost întreruptă.

15.2. FAZA A DOUA

Sarcina continuării proiectului şi a colaborării cu departamentul de analiză a încasărilor i-a revenit luiR. W. Binder şi autorului. Este, cred, un fapt incontestabil — deşi regretabil şi neconvenabil — că realizarea unui proiect de cercetare operaţională depinde mai curînd de persoanele angajate direct decît de tehnicile care se pot utiliza, în cazul prezentat, era inevitabil ca modificările ce au survenit în echipa de studiu să influenţeze modul de abordare a problemei şi într-adevăr, aşa a şi fost.

împreună cu Linder ne-am axat pe două probleme :

1. Standardele de servire pe care compania doreşte să le impună ca *minime* în întregul sistem.

2. Principalul rezultat al proiectului, anume calculul necesarului de forţă de muncă, cerut de modificările survenite, pentru oficiile de rezervare de locuri.

Prin aceasta, noi am privit lucrurile în cu totul alt mod.

Standardele minime ale companiei pentru rezolvarea apelurilor telefonice erau :

a) să nu fie respinse mai mult de 15% din apeluri, *în orice oră;*

b) să nu fie mai mult de 18% apeluri acceptate, *în orice oră,* care să stea în aşteptare mai mult de 20 s, înainte de a fi preluate de către un angajat.

Tabelele obţinute prin simulare puteau fi imediat aplicate, pentru a obţine numărul de linii şi angajaţi necesar a satisface aceste condiţii, la diferite nivele de trafic. Exemple de astfel de tabele sînt reprezentate în tabelele 15.5 şi 15.6. Să analizăm aceste tabele, în scopul identificării unor reguli de lucru, uşor de aplicat de către conducătorii locali şi în acelaşi timp să găsim o metodă aproximativă pe care să o putem utiliza în alte studii, în locul unor cicluri de simulare costisitoare.

După o scurtă căutare, am stabilit că numărul minim de linii şi de angajaţi necesari asigurării standardului *minim* al companiei, poate fi calculat astfel:

1. Numărul necesar de angajaţi în fiecare oră este $E + 3$, unde E este numărul de erlangi ai traficului *acceptat* în ora respectivă, sau 85% din traficul oferit.

2. Numărul necesar de linii este $E + 5$.

Tabelul 15.7 are ca scop compararea numărului de linii şi de angajaţi necesari, rezultaţi în urma simulării şi în urma aplicării regulii „trei plus cinci”, pentru a face faţă volumelor de trafic oferit, la nivelul standardelor minime ale companiei.

Comparaţia realizată arată abateri mici pentru valori scăzute ale nivelelor de trafic şi abateri nesemnificative pentru nivele ridicate. Ni s-a părut rezonabil să recomandăm utilizarea acestei reguli de aproximare de către conducătorii locali, în limita condiţiilor precizate şi pentru valori ale traficului dintre 5 şi 25 de erlangi (în afara acestor limite, se pare că regula nu este bună). Aceasta era scopul simulării: obţinerea unei reguli de aproximare pentru calculul necesarului de linii şi de angajaţi. în realitate, anumite oficii prezintă standarde de servire mai ridicate decît cele minime impuse de companie (un fenomen des întîlnit în transporturile aeriene); de aceea pentru aceste oficii este necesară determinarea unei alte reguli (aceasta a fost regula „patru plus şapte”). Fără îndoială, că prin rezolvarea acestor probleme s-a făcut un pas important în realizarea proiectului.

Procentul de apeluri respinse

Frecvenţa: 250 apeluri/oră Timp de servire: 4 min

Nr. de angajaţi

22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	2	2	2	2	2	2	2	1	1
18	6	6	6	5	5	5	5	4	4
17	10	10	10	9	9	9	9	8	8
16	14	14	13	13	12	12	12	11	11
15	18	18	17	16	16	16	15	15	15
14	23	23	22	22	21	21	21	20	20
13	27	27	27	26	26	26	26	25	25
12	32	32	32	31	31	31	31	31	31
11	39	39	39	38	38	38	38	38	38
Nr. de Huli	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Frecvenţa : 400 apeluri/oră Timp de servire : 2,5 min

Nr. de angajaţi

22	12	9 10	7 8	4 6		2		1	1
21	13	12	10	8		3		2	1
20	14	13	11	9		5	2	3	2
19	15	14	12	10	2	6	2 4	4	3
18	16	15	14	12	3	7	5	6	5
17	17	17	15	13	6	9		8	8
16	18	19	18	17	7	12	6	11	11
15	20	23	22	21		15	9	14	14
14	23	25	25	24	8	20	11	19	19
13	25	32	31	31	12 16	24	15 20	23	23
12	32	36	36	36	20 24	31	24 30	30	30
11	36				31 36	36	35	35	35
Nr. de linii	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Frecvenţa : 500 apeluri/oră Timpul de servire : 2 min

Nr. de angajaţi

22	6	5	5	4	4	4	3	2	1
21	7	7	6	5	5	5	4	3	2
20	9	8	7	6	6	5	5	4	3
19	10	9	8	7	7	6	5	4	4

Nr. de angajaţi

18	11	10	9	8	8	7	7	6	•G
17	13	12	11	10	10	9	9	8	8
16	15	15	14	13	13	12	12	11	11

15	19	18	17	16	15	15	15	15	15
14	22	21	21	20	20	20	20	20	20
13	26	25	24	23	23	23	23	23	■ 22
12	32	32	31	31	31	31	31	31	31
11	38	38	38	37	37	37	37	37	: 37
Nr. de linii	18	19	20	21 j 22		23	21	25	{ ' 26

Principala problemă era următoarea : ca să fie capabil să folosească aceste reguli, un conducător trebuia să poată să procure sau să est imeze volumul traficului pentru viitor. Cu alte cuvinte, el trebuia să prog- nozeze valori ale intensităţii intrărilor şi ale timpilor medii, de servire. Acestea din urmă sînt constante în timp. Frecvenţele intrărilor însă sînt fluctuante în timpul zilei, săptămînal şi anual. Trebuia deci să rezolvăm într-un fel această problemă. După o examinare a înregistrărilor anterioare, am dezvoltat o metodă de previzionare a frecvenţelor orare ale apelurilor, deduse din previzionarea numărului de pasageri. Aceasta utiliza o relaţie între frecvenţele apelurilor la un oficiu de rezervări dintr-un anumit oraş şi numărul pasagerilor ce utilizau cursele aeriene. S-au obţinut astfel relaţii foarte utile.

O altă problemă pe care am întîlnit-o în această fază a studiului a fost aceea de estimare a numărului de clienţi ce cheamă telefonic oficiul de rezervări, în condiţiile în care singurele date înregistrate erau numărul de apeluri acceptate şi numărul celor respinse. O scurtă reflecţie a cititorului îl va convinge că prin adunarea acestora nu vom obţine numărul total de apeluri. Un client, al cărui apel este respins prima oară, în general nu renunţă. Aşa cum făcea d-na Overlander, el mai încearcă de cîteva ori. Fiecare încercare nereuşită se adună la numărul apelurilor respinse.

Considerînd acceptarea sau respingerea apelurilor la prima, la a doua şi la următoarele încercări, a fost posibil să obţinem o estimaţie brută a cererii adevărate, în fiecare oră. S-a presupus că un apel se

Procentul de apeluri acceptate, intirzlate mal mult de 20 s
Frecvenţa : 250 apeluri/oră Timpul de servire : 4 min

Nr. de angajaţi

22	0	1	1	2	2	2	2	2	2
21	1	2	2	2	3	3	3	4	4
20	2	2	2	3	4	5	7	8	
19	3	4	5	6	8	11	14	17	20
? 18	6	8	10	13	15	20	25	30	36
17	14	17	20	23	26	37	48	63	79
16	26	32	38	44	50	60	70	80	91
15	i 36	61	65	70	74	79	84	89	94
14	75	79	83	87	91	92	94	96	97
13	89	91	93	95	97	97	98	98	99
12	95	96	97	98	99	99	99	99	99
11	1 98	98	98	99	99	99	99	99	99

Nr. de linii j ÎS 1 19 j 20 1 21 1 22 | | 23 24 | 25 26

Frecvenţa : 400 apeluri/oră Timpul de servire 2,5 min

Nr. de angajat! '

22	0	0	1	1	2	4	5	7	8
21	1	2	2	3	3	5	8	11	13
20	2	4	5	6	7	11	14	18	21
19	3	6	8	11	14	19	24	29	34
18	6	11	16	21	27	33	39	44	49
17	12	20	29	37	46	50	55	60	64
. 16	' 25	34	43	52	62	66	70	74	78
15	50	56	63	70	76	80	83	87	91
14	! 67	73	78	84	89	91	93	95	96
13	84	86	89	92	95	96	97	97	98
12	92	93	95	97	98	98	99	99	99
11	98	98	98	99	99	99	99	99	99

Nr. de linii 1 18 19 20 21 22 23 24 25 26

Frecvenţa : 500 apeluri/oră Timpul de servire : 2 min

Nr. de angajaţi I

22	0	0	1	1	2	3	5	6	8
21	0	1	2	4	5	7	9	11	13
20	0	2	4	6	8	11	14	18	21
' 19	1	4	7	11	14	19	24	29	34

N’. <le angajat!

18 17 16 15 14 13 12 11	3 9 19 37 59 80 91 96	9 18 29 47 66 84 93 97	14 26 40 57 74 88 94 97	20 35 50 67 82 91 96 98	25 43 61 76 89 95 98 99	31 48 65 80 90 95 98 99	37 53 69 83 92 96 98 99	44 58 73 87 94 96 98 99	50 63 77 90 96 97 98 99
Nr. de linii	18	19	20	21	22	23	24	25	28

Tabelul 15.7

Apelurl/h	Timp mediu de servire, min	Simulare		3 + 5	
		Linii	Angajaţi	Linii	Angajaţi
100	3,0	7	6	Nu se poate aplica la acest volum	
250	2,0	11	10	12	10
400	2,0	16	14	16	14
250	4,0	19	17	19	17
400	3,0	22	20	22	20
500	3,0	26	24	26	24

pierde după *n* încercări succesive nereuşite. Estimarea cererii adevărate *D,* a fost găsită astfel:

$$\frac{\text{apeluri acceptate}}{1 - r}, \qquad (15\text{-}1)$$

unde

$$r = \text{rata respingerii} = \frac{C_r}{C_a + C_r} = \frac{\text{apeluri respinse}}{\text{total apeluri}}.$$

în practică, foarte rar se întîmplă ca *r* să depăşească 15%, iar *n* poate fi considerat cel puţin egal cu 2. în aceste condiţii, cererea adevărată nu va depăşi niciodată numărul de apeluri acceptate mai mult de 2%. De aceea, conducătorii au fost sfătuiţi să folosească înregi stările anterioare privind apelurile acceptate pentru a previ- ziona cererea viitoare şi,

pe această bază, necesarul de personal.

La acest punct, colegii noştri din departamentul de analiză a încasărilor au preluat rezultatele şi le-au transformat în tabele, ce permit conducătorului să stabilească necesarul de angajaţi în fiecare oră pe timp de o lună, odată ce a fost stabilit numărul de apeluri pe lună (aceasta este posibil datorită stabilităţii variaţiei orare a volumului apelurilor). Rezultatele au fost testate şi au trecut proba cu succes, cu o singură excepţie şi aceasta datorită folosirii incorecte a regulii (s-a folosit ,,3 plus 5", în loc de ,,4 plus 7"). Rezultatele au fost implementate§§§§§§§ în cadrul sistemului. Partea rămasă nerezolvată din proiect era ordonanţarea orară a angajaţilor, astfel încît să acopere necesităţile oră de oră, să se satisfacă contractele colective şi să fie cît mai economică posibil. Aceasta nu este o aplicaţie a teoriei aşteptării, cu toate că este însăşi rezultatul final al proiectului.

Realitatea este că în general nu este posibil să organizăm ordonanţarea angajaţilor în schimburi în mod automat. Astfel, acurateţea modelului de aşteptare, sau mai curînd a regulilor deduse din el, nu este o chestiune de importanţă deosebită. Cele două reguli operaţionale prezentate — ,,3 plus 5" şi ,,4 plus 7" — sînt suficient de corecte pentru a putea fi aplicate. Chiar dacă ele nu ar fi fost atît de corecte, dacă, să spunem ar fi dus la erori mici în 10% din cazuri, adică ± 1 angajat din 8, nu ar fi trebuit să fim descumpăniţi. Ar fi poate interesant să încheiem capitolul, prezentînd un caz al problemei organizării schimburilor, cu a cărei soluţionare, practic, întregul proiect se încheie.

15.3.ORGANIZAREA SCHIMBURILOR

Odată obţinute necesităţile de personal pentru fiecare secţie sau departament, acestea trebuiau utilizate pentru a selecta modul de organizare a schimburilor şi a determina numărul de angajaţi în fiecare schimb, pentru a asigura acoperirea fiecărui interval individual de timp. Pentru

§§§§§§§ **în iunie 1964.**

conducător se pun, din nou, două probleme. Prima : organizarea schimburilor trebuie să fie conformă cu politica companiei şi cu respectarea duratei schimbului, a numărului de schimburi zilnic, a gradului de utilizare a personalului, a pauzelor de masă etc., aşa cum este specificat în contractele colective de muncă. în al doilea rînd, el trebuie să menţină zilnic numărul minim de angajaţi necesari.

Această problemă este una de programare liniară în numere întregi, în care funcţia obiectiv ce trebuie minimizată este suma numărului de angajaţi de fiecare schimb. Restricţiile conţin condiţiile ca toate apelurile telefonice să poată fi preluate, iar schimburile să fie de durată standard, cu o pauză de masă. Deşi problema poate fi formulată astfel, ea are dimensiuni mari şi nu există metode eficiente, satisfăcătoare.

O aproximare euristică, ce a fost realizată pentru soluţionarea acestei probleme, a dat rezultate excelente şi are avantajul că utilizatorul poate înţelege cît se poate de clar modul de obţinere a soluţiei. Minimul zilnic de angajaţi necesari este dat de un tabel. Dacă se va folosi modul standard de organizare a schimburilor (trei schimburi pe zi: dimineaţa, după amiază şi noaptea), conducătorul va trebui doar să distribuie personal suficient fiecărui schimb, pentru a acoperi cerinţele şi a permite pauzele de masă. Dacă modul de organizare a schimburilor nu este indicat, schimburile pot fi organizate în urma unei perioade de încercări. După o scurtă perioadă de încercări conducătorul va putea obţine rezultate satisfăcătoare, menţinind un minim de personal în fiecare zi şi utilizînd un număr cît mai mare de schimburi de acelaşi tip.

După ce procedura a fost repetată pentru fiecare zi din săptămînă rezultatele sînt prezentate într-un tabel de alocare în schimburi,, care arată numărul de angajaţi necesar pentru fiecare schimb, pe timpul unei săptămîni.

Tabelul 15.S

Tabelul de alocare a personalului în schimburi (exemplu)

Schimbul	Zilele a&pt&mlnll							|
	D	L	M	M	J	V	S	Total
OO[01] — O8[00] (noaptea)	1	1	1	1	1	1	1	' ' • ■ 7

$O_8$00_$_{16}$00 (zi)	2	2	2	2	2	2	2	14
16°° 2 3[69] (după	2	2	2	2	2	2	2	■ 14
Total	5	5	5	5	5	5	5	35

15.4. **REPARTIZAREA PERSONALULUI**

Problema ce trebuie rezolvată este de a distribui disponibilul de forţă de muncă diferitelor schimburi, astfel încît toate condiţiile impuse de tabelul de alocare a personalului în schimburi să fie satisfăcute. De exemplu, tabelul 15.8 poate conduce la tabelul 15.9 (L înseamnă „zi liberă”, D „schimbul de dimineaţă”, DA — „schimbul de după amiază”, N — „schimbul de noapte”).

Tabelul 15.9

O repartizare dedusă din tabelul 15.8

Ang&jatul	Zilele eăpt&minii D	L |	M	M	J	V	S
A '	I.	I.	D	DA	DA	X	N
B '	X	I.	L	D	DA	DA	N
(. !	X	N	L	L	D	DA	DA
n i	DA	N	X	L	L	D	DA
E [1]	DA	DA	N	N	L	L	D
E	D	DA	DA	N	N	L	L
’G |	L	D	DA	DA	N	N	L

Avantajul unei astfel de repartizări este acela că atît conducerea cît si personalul poate şti uşor care persoane vor lucra în timpul unui anumit schimb.

Din păcate, sarcina întocmirii unor astfel de repartizări este îngreunată de un număr de restricţii ce pot sau nu să apară la nivel individual. Astfel de restricţii sînt:

1. Repartizarea trebuie să se poată roti, adică sarcinile fiecărei persoane trebuie să se poată repeta în cicluri, în cît mai puţine săp- tămîni posibile. Repartizarea dată se roteşte cu un ciclu de şapte săptăm ini.
2. : Orice persoană trebuie să poată lucra în orice ciclu al schimburilor. A stfel, nimănui nu i se permite un tratament preferenţial.
3. Dacă este posibil, secvenţele succesive de schimburi trebuie să fie ide ntice (o secvenţă de schimburi este

totalitatea acelor schimburi deduc ru ce apar între două perioade de „zi liberă”).

4. în mod normal, nu se poate întîmpla ca mai mult de 5 sau 6 zile de lucru să separe zilele libere.

5. Zilele libere nu apar singulare, ci în perechi.

6. Schimburi „duble” (adică două schimburi separate de mai puţin de 10 ore) trebuie evitate.

7. Personalul poate avea preferinţa fie pentru secvenţe lungi de schimburi identice (adică de exemplu şase schimburi de noapte succesive), fie pentru secvenţe împărţite în două sau trei tipuri de schimburi (adică două de zi, două de după amiază, două de noapte).

Păstrînd personalul minim într-o secţie, este practic imposibil de construit o repartizare care să ţină seama de toate condiţiile menţionate. Mai mult, rar se întîmplă că fiecare persoană să lucreze numărul corect de ore în fiecare săptămînă. De obicei, orele lucrate săptămînal tind doar în medie să egaleze numărul corect.

Avînd în vedere aceste consideraţii, a fost creat un sistem de reguli pentru întocmirea unor repartizări, pentru a determina soluţia problemelor pentru două oficii de rezervări. Primul pas constă în a calcula numărul minim de angajaţi necesar pentru toată săptămînă. Acesta se obţine prin împărţirea numărului total de schimburi-om necesare (obţinut din tabele de alocare a personalului în schimburi) la 6 pentru o săptămînă de 5 zile lucrătoare.

Rezultatul rotunjit la valoarea întreagă cea mai apropiată se numeşte numărul personalului de bază (NPB). Fiecare schimb-om, determinat de NPB în plus faţă de necesarul total se numeşte schimb fals. în exemplul nostru anterior necesarul total era de 35 de schimburi -om ; NPB a fost egal cu şapte, fără nici un schimb fals.

Pentru a vedea dacă se poate evita apariţia schimburilor false, fiecare necesar zilnic total se scade din NPB şi se obţine numărul de persoane ce vor fi de serviciu în fiecare zi. Un calcul simplu va determina dacă este necesar personal suplimentar peste NPB pentru a evita apariţia unor zile libere singure. Acest calcul va decide de asemenea modul de grupare în perechi a zilelor libere individuale. Rezultatul este un tabel de zile libere cuplate.

Tabelul 15.10 prezintă cuplările ce rezultă din exemplul

anterior. Rămîne acum să completăm lista astfel ca secvenţele de zile libere şi de schimburi să fie răspîndite cît mai regulat. Ideal cinci zile lucrătoare trebuie să separe perioade succesive de zile libere, dar ocazional va fi necesar de a avea secvenţe de şase sau chiar şapte zile lucrătoare, pentru a asigura rotaţia repartizărilor. Vom prezenta în continuare cîteva reguli ce au fost stabilite pentru a servi ca ghid conducătorilor ce utilizează metoda :

1. Mai întîi trebuie stabilite cuplările zilelor libere. Acestea se trec pe diagonală în tabelul de repartizare, începînd cu duminica şi lunea primei săptămîni şi terminînd cu sîmbăta şi duminica celei de-a şaptea

Tabelul 15.10

Tabelul numărului de cuplări de zile libere

D/L	L/M	M/M	M/J	J/V	V/S	S/D
1	1	1	1	1	1	1

săptămîni. Se repetă acest mod de repartizare pînă cînd se depăşeşte cel mai mic număr ce apare în tabelul cuplărilor zilelor libere. Apoi se alocă următoarele cuplări astfel încît să se evite secvenţele lungi de schimburi consecutive.

2. Se alocă mai întîi schimburile de noapte şi se continuă cu cele de zi, apoi cu cele de după-amiază.

3. Un schimb de noapte va urma unei zile libere sau unui alt schimb de noapte.

4. Schimburile de zi vor urma după schimburi ce sînt localizate în timp mai devreme în orice secvenţă particulară de schimburi (de menţionat că un schimb de noapte este cel mai timpuriu schimb ce poate apărea în cadrul unei zile).

5. După distribuirea tuturor schimburilor, trebuie să existe numărul corect din fiecare tip de schimb în fiecare zi a spătămînii (aşa după cum se vede în tabelul de alocare a personalului în schimburi).

Concediile de odihnă, precum şi cele de boală sînt considerate în plus faţă de necesarul de bază al personalului şi depind de frecvenţa de îmbolnăvire şi de numărul personalului pentru fiecare situaţie în parte. Numărul personalului suplimentar necesar poate fi uşor obţinut, cunoscîndu-se aceste caracteristici. Numărul acestui

personal suplimentar este la latitudinea conducătorului local.

15.5. COMENTARIU

Comentariul acestui capitol este de fapt capitolul 8. Morala sa este că utilitatea unui model de aşteptare este limitată de precizia intrărilor sale. Cu alte cuvinte, ar fi mai util să dedicăm mai mult timp în a previziona intrările cu suficientă precizie decît a pierde timpul analizînd dacă repartiţia timpului de servire este sau nu exponenţială.

Din cele trei obiective specificate la începutul proiectului, două au fost atinse. Ca rezumat :

1. S-a determinat o formulă pentru a estima necesarul liniilor telefonice şi al angajaţilor în funcţie de previzionări ale volumului de apeluri la oficiile de rezervare de locuri, pentru standarde specificate de servire. Aceasta a fost convertită de către Kirkman şi Mackay de la departamentul de analiză a încasărilor în tabele uşor aplicabile, şi aceste tabele au fost validate de teste făcute de Kirkman. în acest fel, primul obiectiv a fost realizat.
2. S-a dezvoltat, testat şi validat o tehnică euristică pentru planificarea şi organizarea orarului angajaţilor din cadrul oficiilor de rezervare. Astfel, s-a atins al doilea punct.
3. Cea mai eficientă organizare a oficiilor de rezervare nu a fost pînă în prezent suficient cercetată şi determinată.

în viziunea comentariilor făcute în cap. 6 despre eficienţa mult mai mare a simulării cu metoda Monte Carlo, în problemele de comparare a diferitelor forme de organizare a serviciului, decît în aCelea privind estimarea numărului de staţii de servire, apare oarecum nefiresc să spunem că al treilea obiectiv continuă să fie un obiectiv, însă aceasta este situaţia.

16

CONCLUZII

Acum este momentul să ne reîntoarcem la problemele domnilor Szymano'wski, Mcdonald şi Overlander, căci sîntem în măsură să examinăm cele trei povestitoare în care şi-au făcut ei apariţia şi să le înţelegem morala. Este clar că inginerul-şef adjunct al corporaţiei „Allied Coke and Iron" nu este prea bine informat despre teoria aşteptării. Căci un sistem de aşteptare în care dublarea capacităţii de servire ar duce doar la îmbunătăţirea timpului mediu de aşteptare este foarte neobişnuit. De exemplu, să considerăm cele două modele Jf/lf/l : (oo/FIFO) şi Jf/Jf/2 : (oo/FIFO) în care intrările au aceeaşi intensitate X. Pentru primul avem pj = X/fx iar pentru al doilea p_2 = X/(2 p.). Formulele lui Erlang ne dau

$$W_9(l) = \frac{\text{Pi}}{(1 - Pi)\ H} \qquad X/jx\ 1\ i\ —\ (^{X}M)\ p\text{-}\ ' \qquad \textbf{(16.1)}$$

$$\frac{[X/(2tx)^{\wedge}}{1\text{-}[X/(2|x)P\ fx\ '} \pounds$$

Astfel, raportul $W_9(2)/W_9(l)$ are expresia

$$\pounds\ (\ M\ \frac{1\ -\ (X/!x)}{4\ V\ fx\ 7\ 1\ —\ (X/2fx)^2} \qquad (16.2$$

care, pentru orice valori admisibile ale lui X şi jx, trebuie să fie < 1/2.

Se pare că ideea lui Szymanowski este valoroasă. Dar trebuie să stabilim cit costă instalarea şi funcţionarea unui al doilea cîntar- -basculă şi să comparăm acest cost cu cel asociat reducerii timpului de aşteptare al camioanelor. De exemplu, să presupunem că ne costă cu totul A $ pe zi funcţionarea celui de-al doilea cîntar-basculă şi că un minut de întîrziere al unui camion costă *B* $. Atunci reducerea costului datorită instalării celui de-al doilea cîntar-basculă poate fi calculată pentru orice volum al traficului. Să presupunem că într-o oră sosesc în medie 20 camioane şi că timpul de blocare pentru o operaţie de cîntărire este de 2,7 min. Atunci X/p. = 0,9 şi un calcul rapid arată că timpul mediu de aşteptare pe camion va fi de 24,3 min în cazul unui singur cîntar-basculă şi de 0,76 min în cazul a două cîntare-basculă. Astfel cîştigul potenţial rezultat din introducerea unui al doilea cîntar-basculă va fi de

480 X 23,54 x *B* $/zi

şi aceasta poate fi comparată cu *A* pentru a determina cîştigul net al corporaţiei.

Acesta este unul din modurile de a analiza lucrurile, dacă numărul camioanelor aflate în circuit este mare. Un alt mod este de a considera timpul de rotaţie al fiecărui camion şi de a determina sporul de utilizare rezultat din instalarea unui al doilea cîntar-basculă. Există mai multe posibilităţi. Dacă există mai multe puncte de oprire în fiecare circuit al unui camion (şi trebuie să fie cel puţin trei), atunci s-ar putea să fie convenabil modelul ciclic de aşteptare al lui Koenigsberg.

Pe de altă parte, nu este deloc imposibil ca, în ciuda nepriceperii sale în teoria aşteptării, inginerul şef adjunct să posede o altă soluţie mai bună decît instalarea celui de-al doilea cîntar-basculă. Să presupunem că timpul de blocare la cîntărire al unui camion este independent de mărimea camionului (ceea ce este evident pînă la o anumită limită) şi de încărcătură pe care o transportă. Atunci, dacă este posibil sa înlocuim camioanele existente cu altele ce pot duce o încărcătură dublă, este posibil să reducem traficul prin această înlocuire. Acelaşi volum de deşeuri poate trece peste cîntarul-basculă de două ori mai repede, adică intensitatea traficului, în erlangi, va fi jumătate din cea veche. Timpul mediu de aşteptare al unui camion se reduce la 2,21 min, iar cîştigul potenţial va depinde de noul cost

al minutului de întîrziere pentru camioanele de acest nou tip; fie acest cost *C* $. Atunci cîştigul brut va fi

480 X 24,3 x *B* - 240 X 2,21 X *C.*

Costul noilor camioane este, să zicem, *D* $ (iniţial am presupus că este 250 000 $), astfel că putem calcula uşor cîştigul net. Ar putea fi mai economic să procedăm aşa cum sugerează inginerul-şef adjunct, dar în nici un caz pentru motivele pe care le expune.

Întorcîndu-ne la staţia de cale ferată Paltries, găsim că în principiu propunerea domnului Murdo Mcdonald este o chestiune de priorităţi. în mod formal putem compara rezultatele ce vor fi obţinute dintr-un sistem cu două staţii de servire cu acces nerestricţionat şi două clase de priorităţi relative (\ şi C_2, cu cele ce vor fi obţinute dintr-un sistem cu două staţii de servire separată, una care serveşte clienţii clasei C_y şi alta ce serveşte clienţii clasei C_2. Nu este greu să facem calculele teoretic. Dar conducerea staţiei, dacă ar încerca să implementeze sistemul propus, n-ar reuşi niciodată să-1 facă să funcţioneze ; căci, să nu uităm, clienţii sînt oameni şi este total improbabil ca ei să lase să intre în faţa lor pe alţii, chiar dacă aceştia ar solicita bilete de prioritate mai mare. Ar fi o rebeliune, sau o obstrucţie împotriva clienţilor din clasa prioritară C_1 care şi-ar cere privelegiile la care au dreptul. Experienţele relatate în cap. 10 ne întăresc în convingerea noastră. Naturam furca expellas, tamen usque recurret********.

Deoarece numărul pasagerilor de clasa întîi este mic în gara Paltries, putem considera evident şi situaţia ca orice pasager din orice clasă să-şi cumpere biletul la oricare din cele două ghişee. Foarte puţini oameni ar suferi din această cauză, fiind lezaţi în superioritatea lor economică, dar multe persoane (printre care şi dl. Mcdonald) ar beneficia de un spor de calitate al serviciului.

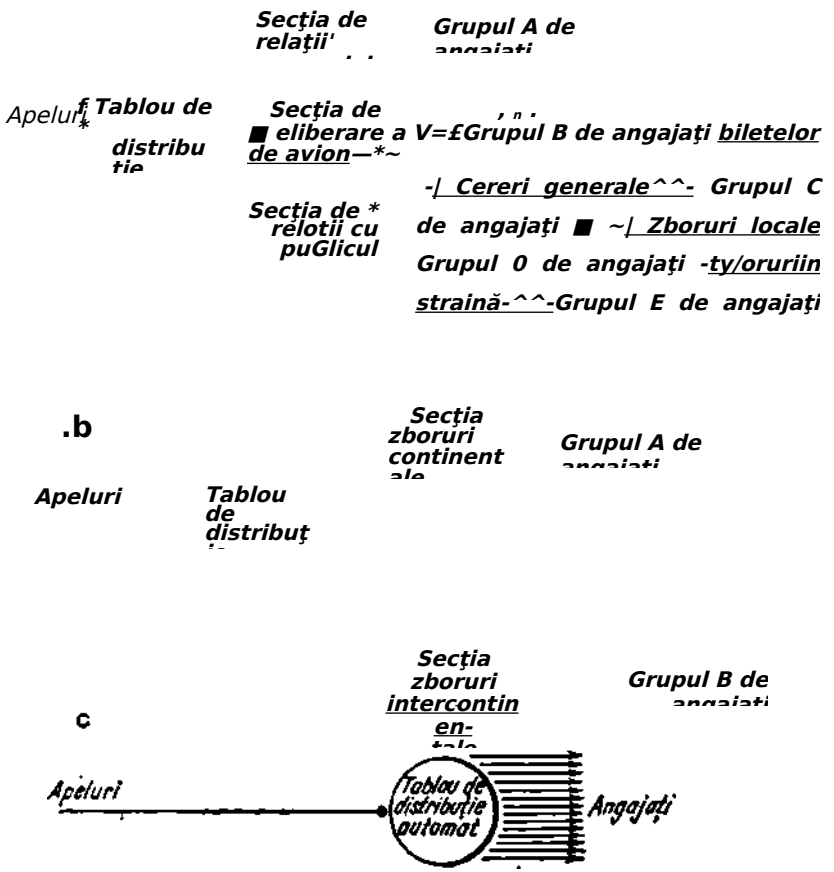
Motivele posibile pentru performanţele deplorabile ale serviciului de rezervare de locuri ale companiei aeriene

---

******** **Vers din Horaţiu.** ***(N.* T.)**

„TranscedentaJ”, comparativ cu situaţia din cadrul companiei „Continental and Caribbean” pot fi multe. Cititorul este în măsură acum, după parcurgerea capitolelor 9 şi 15, să completeze o listă lungă de motive; fără însă a dispune de mai multe informaţii decît a reuşit să ne dea la supărare Overlander, este greu să ajungem la o concluzie limpede. Putem insă să spunem că diferenţa între performanţele celor două servicii are o legătură cu formele de organizare ale acestor servicii. Cititorul este

invitat să privească mai multe organizări posibile, sugerate în fig 16.1. Să presupunem că, oricare ar fi modul de organizare, frecvența apelurilor in orele de vîrf este aceeași, să zicem 30 apeluri pe minut, dar îndrumarea lor este alta.



I-'ig. 16.1. Exemple de sisteme de rezervări

Să mai presupunem că repartiţiile timpilor de servire

sînt toate exponenţiale şi identice (să zicem cu media 2,0 min). Să ne imaginăm acum variaţii mari ale numărului de angajaţi în Berviciile de rezervare de bilete, ce asigură acelaşi standard de servire, presupunînd peste tot că lungimea şirurilor de aşteptare poate fi infinită; dacă cititorul va voi să adauge şi limitări asupra capacităţii şirurilor de aşteptare, aBtfel încît va trebui pus în discuţie şi numărul de linii telefonice necesare, nu numai numărul de angajaţi, atunci calculele în scopul comparării vor deveni enorme. Nu se poate obţine uşor un răspuns la întrebarea „De ce compania Continental şi Carbbean asigură un serviciu mai bun decît compania Transcedental ? ’

Vedem astfel că răspunsurile la trei întrebări legate de trei sisteme de aşteptare, toate aparent simple, diferă substanţial în complexitate şi în volumul de studiu şi calcule pe eare-1 necesită. Dar din ele — şi să sperăm şi din restul acestei cărţi — putem trage cîteva concluzii utile. Întîi de toate, că însăşi sistemele de aşteptare obişnuite, întîl- nitc zi de zi, sînt necunoscute pentru majoritatea oamenilor — fie ei ingineri şefi adjuncţi, şefi de gară, diriginţi de oficii poştale, directori de companii aeriene, căpitani de port etc. Cu toată experienţa lor vastă ca clienţi, puţini oameni înţeleg suficient sistemele de aşteptare pentru a putea organiza bine servirea. Experienţa nu ajută la nimic fără pătrunderea fenomenului.

Este bine dacă dispunem de modele riguroase în locul unora aproximative; dar este mai bine să avem modele aproximative decît nimic. Este mai bine să avem o teorie logică şi bine fundamentată, însă incompletă şi nedezvoltată, decît să n-avem nici o teorie. Teoria aşteptării, în zilele noastre, este incompletă, dar poate fi folosită, atîta timp cît ne dăm seama de limitele sale. Ea este o teorie fără prea multe baze empirice, bazată în

special pe experienţa din domeniul telecomunicaţiilor. Ar. fi de dorit să ştim mult mai multe despre comportarea reală a oamenilor în aşteptare; pînă atunci, mare parte din teoria ce apare în revistele de specialitate nu este altceva decît o colecţie de speculaţii matematice fermecătoare. Dar matematica, oricît de ingenioasă ar fi, nu poate ţine locul cunoaşterii umane.

ANEXA 1

LISTA PRINCIPALELOR SIMBOLURI

Convenţiile matematice uzuale sînt menţinute şi în cadrul acestei cărţi; de exemplu, dacă *x* este o variabilă aleatoare continuă, atunci *f(x)* este densitatea sa de repartiţie, iar *F(x)* este funcţia de repartiţie.

Dacă însă *y* eBte o variabilă deterministă, atunci j(y)esteo funcţie de *y.*

Transformatele Laplace sînt notate prin asteriscuri. Astfel, transformata Laplace a funcţiei *F(x)* se scrie *F*(z).*

în cadrul textului au fost utilizate anumite simboluri speciale, folosite doar cu un singur sens în întieaga căite: acestea formează lista de mai jos. Celelalte simboluri sînt utilizate cu diferite semnificaţii, evident cu precizarea sensului pe care îl au în fiecare context, a, a(i), *A(t)* media, densitatea de repartiţie şi funcţia de repartiţie a timpilor dintre sosirile clieuţilor;

b, b(t), B(t)	media, densitatea de repartiţie şi funcţia de repartiţie a timpilor de servire (rau de reţinere);

c	numărul staţiilor de servire;
D	se referă la o repartiţie constantă;
	se referă la repartiţia Erlang de parametrul *Ic,* adică repartiţia sumei a *Ic* variabile independente şi repartizate exponenţial identic;
G	se referă la o repartiţie generală;
GI	se referă la o repartiţie generală cu ipoteze de independenţă ;

L	capacitate a sistemului, adică limita superioară a numărului de clienţi ce pot exista în sistem în
n, n	numărul clienţilor existenţi în sistem şi valoarea sa medie;
n_a,	numărul clienţilor existenţi în sistem şi care aşteaptă Bă fie serviţi, respectiv media lor;
	probabilitatea existenţei a *n* clienţi în sistem, la momentul t;
P(8, t)	funcţia generatoare a probabilităţilor p,(t);
*P**	probabilitatea, în starea stabilă, a existenţei a *n* clienţi în sistem;
P(s)	funcţia generatoare a probabilităţilor $p_{„}$;
в	o variabilă fictivă ce apare în cadrul funcţiilor generatoare ;
U	variabilă statistică, ce măsoară timpul total de aşteptare ;
υ	utilizarea staţiilor de servire;
v	variabilă statistică măsurînd timpul de
V	aşteptare; coeficientul de variaţie a unei
W, w(u), W(u)	media, densitatea de repartiţie şi funcţia de repartiţie a timpilor totali de aşteptare a clienţilor în sistem; $w_a(v)$, $W_s(v)$ media, densitatea de repartiţie şi funcţia de repartiţie a timpilor de aşteptare a clienţilor în sistem;
z	variabila unei transformate Laplace; simboluri lui Kronecker;
X	intensitatea medie a sosirilor clienţilor;
P c	intensitatea medie de servire (pentru o staţie de servire); intensitatea traficului, exprimată în erlangi;

ANEXA 2

FORMULE ŞI GRAFICE UTILE

Această anexă este împărţită în două părţi. în prima parte sînt prezentate anumite grafice legate de modelele de aşteptare întîlnite în cadrul cărţii. în partea a doua se prezintă tabele ale principalelor formule întîlnite în cadrul modelelor cel mai des utilizate.

GRAFICE ŞI CURBE DE LUCRU

Există şapte grafice: primele patru, de la A 2-1 la A 2-4, sînt reproduse după lucrarea:

Burke, P. J. *Equilibrium Delay Distribution fer One-Channel with Constant Holding Time, Poisson Input and Random Service.* în : Beli Systcm Technical Journal, July 1959.

Aduc şi pe această cale mulţumirile mele editorilor revistei „Beli System Technical Journal" pentru permisiunea publicării acestor reproduceri. Aceste grafice au fost realizate de Burke pentru a prezenta rezultatele pentru modelul JW/D/1: (oo/SIRO), el fiind primul care l-a studiat. Un interes suplimentar îl prezintă faptul că în graficele trei şi patru sînt încorporate şi rezultatele referitoare la modele Jf/D/l: (oo/FIFO) şi respectiv Jf/Jf/1: (oo/SIRO). în aceste grafice, ca şi în cele ce urmează, timpii de aşteptare (sau întîrzierile) sînt exprimaţi ca multipli ai timpului mediu de servire (sau de reţinere).

Aceasta este o practică frecventă in graficele de aşteptare. în grafice se utilizează de asemenea termenul de grad de ocupare care în cazul modelelor ce permit şiruri de

aşteptare infinite, fără respingeri de clienţi, este identic cu termenul de intensitate a traficului.

Graficele A2-5 — A2-7 sînt reproduse cu permisiunea editorilor după lucrarea :

Wilkinson, R. I. *Worktng Curtjcs for Delayed Exponenţial Calls Served in Random Order.* In : Beli System Technical Journal, March 1953.

Şi aceste grafice au un domeniu mai larg de aplicabilitate decît sugerează titlul lucrării. Primele două pot fi aplicate la orice model din familia Jf/Jf/c :(oo/GD), unde GD semnifică că orice fel de disciplină de aşteptare, cu excepţia celor rezultate din respingerea clienţilor. Ele sînt aplicabile în special principalelor trei modele cu disciplina de aşteptare FIFO, SIEO şi LIFO. Ultimul grafic, A3-7, pe care Wilkinson l-a preluat dintr-o lucrare a lui Kiordan, anume „Delay Curves for Calls Served ăt Random". în : Beli System Technical Journal, January 1953, se referă doar la modelul *MjJHIc:* (oo/SIRO).

Lucrarea lui Wilkinson conţine şi alte grafice foarte utile, referitoare la modelele specifice de acest tip, cum ar fi pentru c = 1,2 , ..., pe care însă nu le reproducem aici. Nu sînt necesare explicaţii suplimentare referitoare la graficele prezentate. Ultimul ar putea fi însă o excepţie. Pentru a obţine probabilitatea ca fiecare client să aştepte mai mult decît *v* unităţi de timp, trebuie calculat *v/b,* care este timpul aşteptării exprimat ca multiplu al timpului mediu de servire, iar apoi trebuie calculat *R = cv/b.* Atunci

1 —W_e(®) = probabilitatea unui timp de aşteptare mai lung decît *v* = W,(>0) • *Q(> R),*

unde W_i(> 0) şi Q(> *R)* sînt funcţiile prezentate în graficile A3-6 şi respectiv A3-7.

FORMULE UTILE

Această parte este destinată exclusiv prezentării unor formule foarte utilizate in teoria aşteptării. Pentru anumite modele exiBtă formule generale, dar ele nu sînt prezentate aici, deoarece sînt dificil de înţeles şi de calculat.

1. *O staţie de servire, sosiri repartizate Poisson M[G/l*: (oo/GD). Formulele lui Pollaczek — Hincin pot fi utilizate pentru estimarea numărului mediu de clienţi existenţi in sistem şi a timpului

mediu de aşteptare. Alte elemente nu se obţin cu uşurinţă., exceptînd cazurile particulare în care repartiţia timpului de servire este exponenţială, constantă sau erlangiană :

$$n_{=}p_{+}^{pt(1+rg)},\ W_t = P^{(1+} \qquad 2(1-p)\qquad 2(1-p)|i \qquad .$$

Jf/Jf/1 : (oo/GD)

Repartiţiile numărului de clienţi în aşteptare (în şirul de aşteptare sau în sistem) nu sînt dependente de disciplina de aşteptare. Soluţia în starea de tranziţie este

$$p(n,\ 0 = \exp\{-(X+n)0\ x$$

$$X\ p"\ {}^{2}Z_{B}(o;)4\text{-}p^{(n\_1)/2}\text{-}fn+i(a;)+p"(l—p)\ Ş\ p\text{-}'"^{+}'>'^{2}Z_{„+},\ (*)]\ ,$$

unde $x = 2t$ /xjî. Soluţia în starea stabilă este

$$P» = (1\ p)\ p",\ îl = 0,1,\ 2,\ ...$$

Timpul total mediu de aşteptare şi timpul mediu de aşteptare nu sînt afectaţi de natura disciplinei de aşteptare. Ei sînt

$$W_{q} = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\mu} \qquad W = \frac{1}{1-\rho}$$

Repartiţiile timpilor de aşteptare şi a timpilor totali de aşteptare sînt afectaţi de disciplina de aşteptare Avem :

-FIFO

® =

0,

$$w_4(\cdot) \quad 1 \sim P>$$

$$p(l - p);ie-^{<1}-'\cdot\cdot'^{1'}$$

$$w(\cdot) = (1 - p)\,[i\, e^{-(1-p)\,|iW}, \qquad u > 0.$$

- SIRO

Probabilitatea ca un client care trebuie să aştepte mai mult decît *t* este dată de aproximarea lui Riordan (v. graficul A3-7):

$$\exp\{-a(1-p)(X\ t\} + \frac{-}{2}\ 2| \exp\{-P(1-p)\ [Lt\},$$

unde a = 1 + Kp/2, iar p = 1 — /p/2.

- LIFO

Repartiţia timpilor totali de aşteptare este identică cu repartiţia perioadelor ocupate pentru modelul FIFO. Densitatea de repartiţie este

$$w(u) = \exp\{-(1-p)\ [x\ v\} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} —$$

$M/E_k/1$: (oo/FIFO).

Repartiţia numărului de clienţi existenţi în sistem este foarte uşor exprimată cu ajutorul funcţiei generatoare; din aceasta diferitele valori ale lui p_n pot fi obţinute prin derivare repetată :

$$J-[9\ \ -\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{1 — S — ps(l — s)*}.$$

Transformata Laplace a repartiţiei timpilor de aşteptare este dată de

(1 +

O tratare analitică a modelului este destul de anevoioasă. Exceptînd cazul $k = 1$, calculul inversiei transformatei Laplace necesită anumite funcţii speciale, studiate de Luchak, care se aseamănă într-o oarecare măsură cu funcţiile Bessel incomplete.

Repartiţia perioadei ocupate ridică aceleaşi probleme şi de aceea nu există o formulă utilizabilă pentru modelul MIE_k/l : (oo/LIFO).

M/D/l :(oo/FIFO)

Probabilităţile în starea stabilă sînt date de

Repartiţia timpilor de aşteptare este dată de

$$W_e(\textcircled{R}) = (1 - p) \sum_{i=0} \exp\left(P(\lambda - \mu)t\right) \frac{(P\lambda t)^i}{i!}$$

Pentru a obţine mediile, se pot utiliza formulele lui Pollaczek — Hincin. Valorile medii cele mai utilizate sînt

$$W_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu},$$

***M/D/l* : (oo/SIRO)**

Formulele acestui model nu s-au obţinut încă; vezi graficele A3-1 - A3-4.

Singurele formule utilizabile sînt acelea ale mediilor. Pentru două clase de priorităţi relative avem :

SERVICE PRIOR

$$"1 \quad \frac{qp(l+p-ap)}{1-qp} \qquad (1-p)(l-ap)\,'$$

$$\frac{ap^2}{1-qp} \qquad «_{i2} = \frac{(1\sim«)\,P^2}{(1-p)(l-ap)\,'}$$

$$W_{91} = \frac{X}{n(H-} \qquad W_{g2} = \frac{}{(H-X)\,(H-aX)}$$

Pentru două clase de prioritate, din care una are prioritate absolută faţă de cealaltă, avem :

^{n}i — 0,1, 2, ... ,

’ Hi 7 \ Hi 7

M—
^{n}i — P1 -------> n
¹ — Pi

unde pj = oqX/p.!,

V,-(l +-i—IA,
V ¹ — Pl) Hi

V 1—Pl/ Hi

$$\frac{W - Pi}{Pa''(l - p')^{5}}$$

MAI MULTE STAŢII DE SERVERE, SOSIRI REPARTIZATE POISSON

, M/M/c: (oo/FIFO)

Pentru acest model există grafice foarte utile. Graficele A3-5 şi A3-6 sînt ambele utilizabile. în plus, există graficele lui Molina, mult mai detaliate, ce pot fi găsite în lucrarea :

Molina, E. C. ***Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems.*** **în : Beli System Technical Journal, July, 1927.**

De aceea formulele nu sînt de mare folos practicienilor. Principalele formule sînt :

$$Pi = \frac{1}{\left[\sum_{r=0}^{c-1} \frac{(cp)^r}{r!} + \frac{(cp)^c}{c!}\cdot\frac{1}{1-p}\right]^{-1}}$$

$$\frac{C^c}{c!}\, p^n p_0,\ n > c.$$

Probabilitatea ca un client să sosească şi să găsească toate

staţiile de servire ocupate este

$$\overline{X}P_{00}, \quad \frac{(cp)^c}{c!(1-p)} \; Po$$

Această cantitate este frecvent notată în literatura prin simbolul

P(> 0). în carte ea este notată $(0) şi este egală cu complementul lui $W_s(0)$, care este probabilitatea unui timp de aşteptare pozitiv. Similar *Q(v)* este probabilitatea unui timp de aşteptare ce depăşeşte *v,* care este complementul lui $W_s(®)$. Această cantitate este notată de obicei prin P(> t). Atunci

$$\bar{n}_q \qquad\qquad W_q = \frac{n_q}{\lambda}$$

$$Q(v) = \exp [— cp, (1 - p) ®] \bullet Q(0).$$

$$\frac{\mathbf{P(cp)^c}}{\mathbf{c!\ (1 - p)}} \quad Po$$

M/M/c: (Z/FIFO)

Nu există grafice utile pentru acest model. Principalele formule sînt

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^r}{r!} + \frac{(c\rho)^c}{c!}\left[\frac{1-\rho^{L-c+1}}{1-\rho}\right]}, \qquad p_n \quad \frac{\mathbf{(cp)^n}}{\mathbf{c^c - p}}\ Po, \ ^{\bullet}_{c} < n < L.\ c!$$

Cantitatea p_L este probabilitatea ca un client să fie respins (aşa-nu- mita „probabilitate de pierdere").

M/M/c: (oo/SIRO)

Nu merită să prezentăm formula pentru acest model. Formulele exacte sînt nefolosibile în scopuri practice. Graficele A3-5 — A3-7 sînt mult mai adecvate.

Jf/P/c :(oo/FIFO)

Pentru acest model există grafice deosebit de utile privind repartiţia timpului de aşteptare şi a timpului mediu de aşteptare. O sursă bibliografică extrem de interesantă este

Shelton, J. R. *Solution Melhods for Waiting Line Problems.* în : Journal of Industrial Engineering, 11, 4, 1960,

Există prea multe grafice pentru a fi reproduse aici. Ele

sînt realizate pentru *c = 1,2,* 3, 4, 5, 8,10, 20. Singurele formule care pot fi aplicate sînt următoarele :

$$P(s) = \frac{C - X \quad (tf\ 1)\ (s\ Sj J \ldots (S\ Se - 1)}{(1 - s_x)\ (1\ s_2) \cdot \bullet \bullet (!\ Sc \cdot \quad 1 - s^c e^{X(1\_"}}$$

unde 1, s_{lf} s_2, ..s_{c_1} sînt cele c rădăcini ale ecuaţiei

$$1 - s^c e^{X(1-"} = O,$$

şi pentru timpul mediu de aşteptare :

$$\text{S MI}$$
$$\text{i = 1} \quad \text{L } i = ic\ 3\ 1_{\text{j = ic + 1}}\ 3\ \text{J}$$

STAŢII DE SERVIRE ÎN SERIE

Există puţine rezultate aplicabile. Singurele formule cu semnificaţie practică sînt acelea, datorate lui Jackson, legate de un sistem cu k faze, fiecare de tipul $M/M/c$: (oo/FIFO):

$$P(n_u\ n_2, \ldots, n_t) = p(0,0, \ldots,0) \prod_{r=1}^{k} b(n_r),$$

unde n_r este numărul clienţilor prezenţi în faza r, iar

(CrPrM

$$n_r <$$
$$C_r;$$

$$\frac{c_r^{c_r}}{c_r!}\ \rho_r^{n_r},$$

p_r fiind $X/(c_r\ p_r)$.

STAŢII DE SERVIRE CICLICE

Formulele lui Koenigsberg pentru un sistem ciclic cu k faze sînt

. . ...

unde = 1/p.j iar semnifică însumarea după toate ? combinatiile

astfel încît £ $r_{(} = N$, unde N este numărul clienţilor existenţi în ,=1

sistem. Probabilitatea ca faza i să fie liberă este-----• $k - 1$ $N + k - 1$

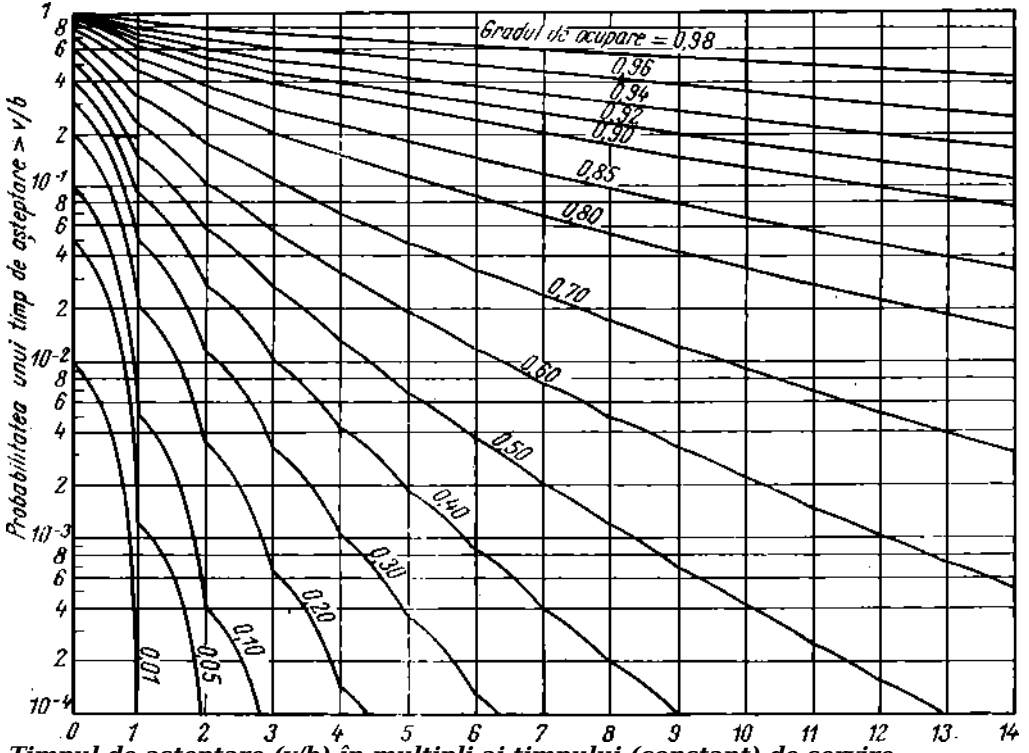
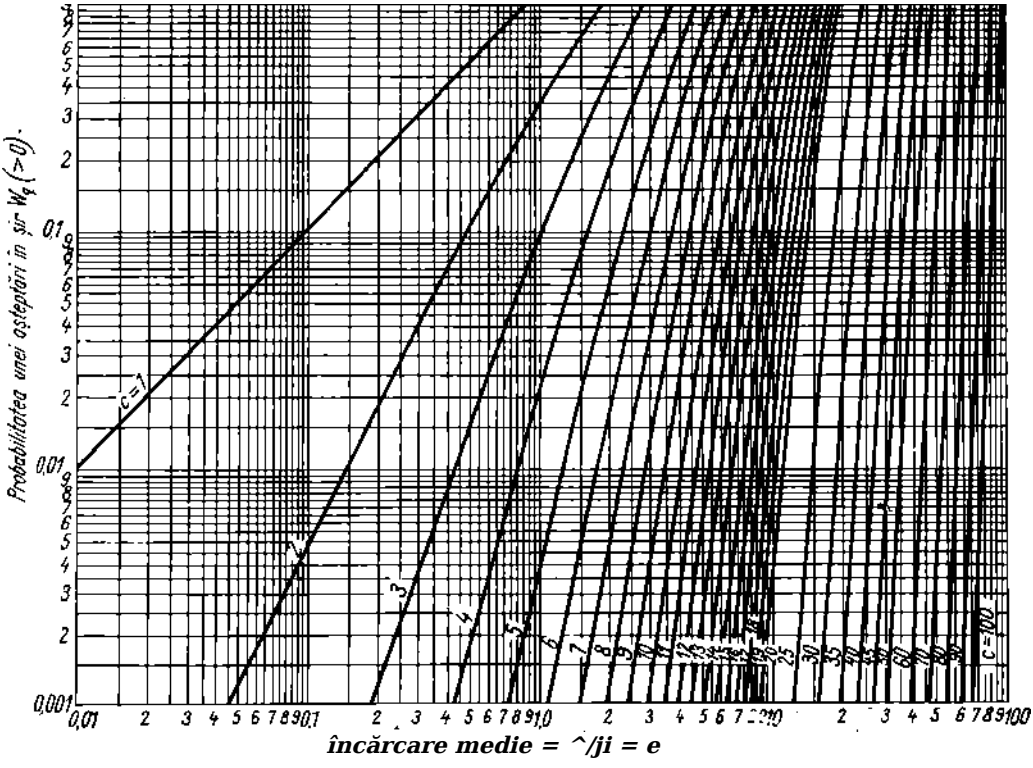
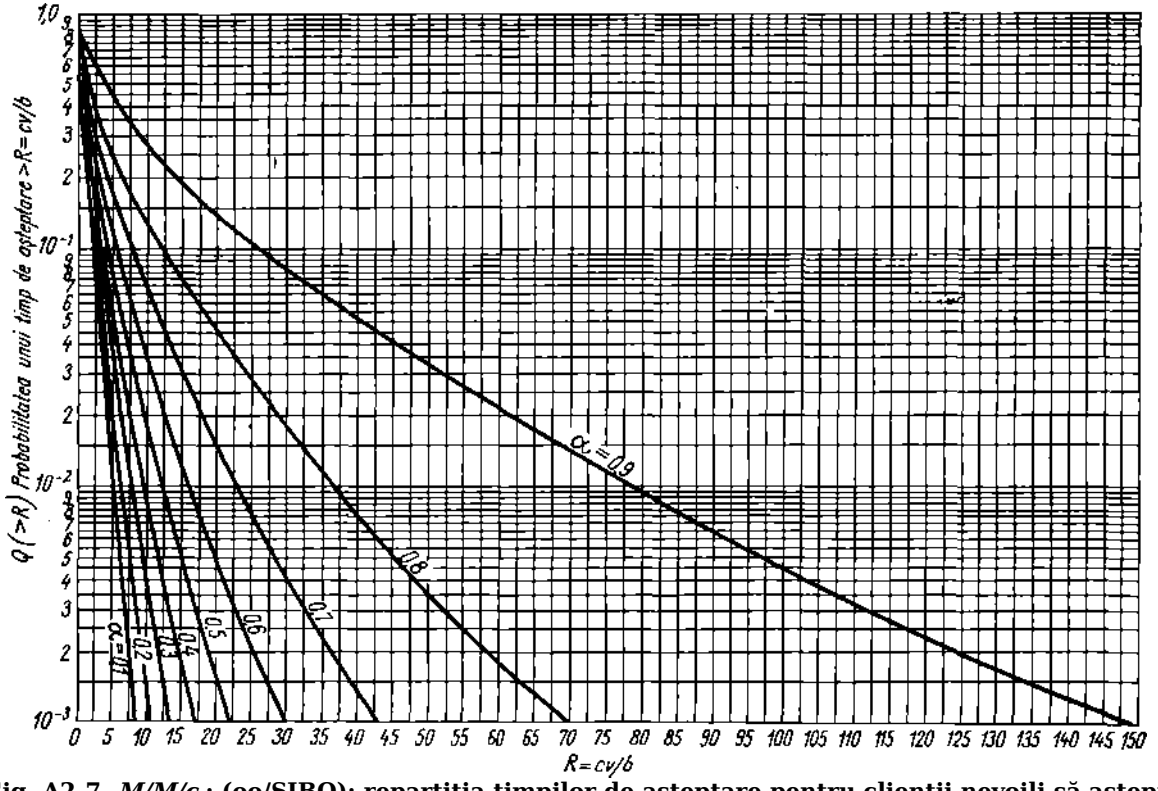


Fig. A2-1. Af/Z)/1 ; (oo SIRO) ; repartiţia timpului de aşteptare.

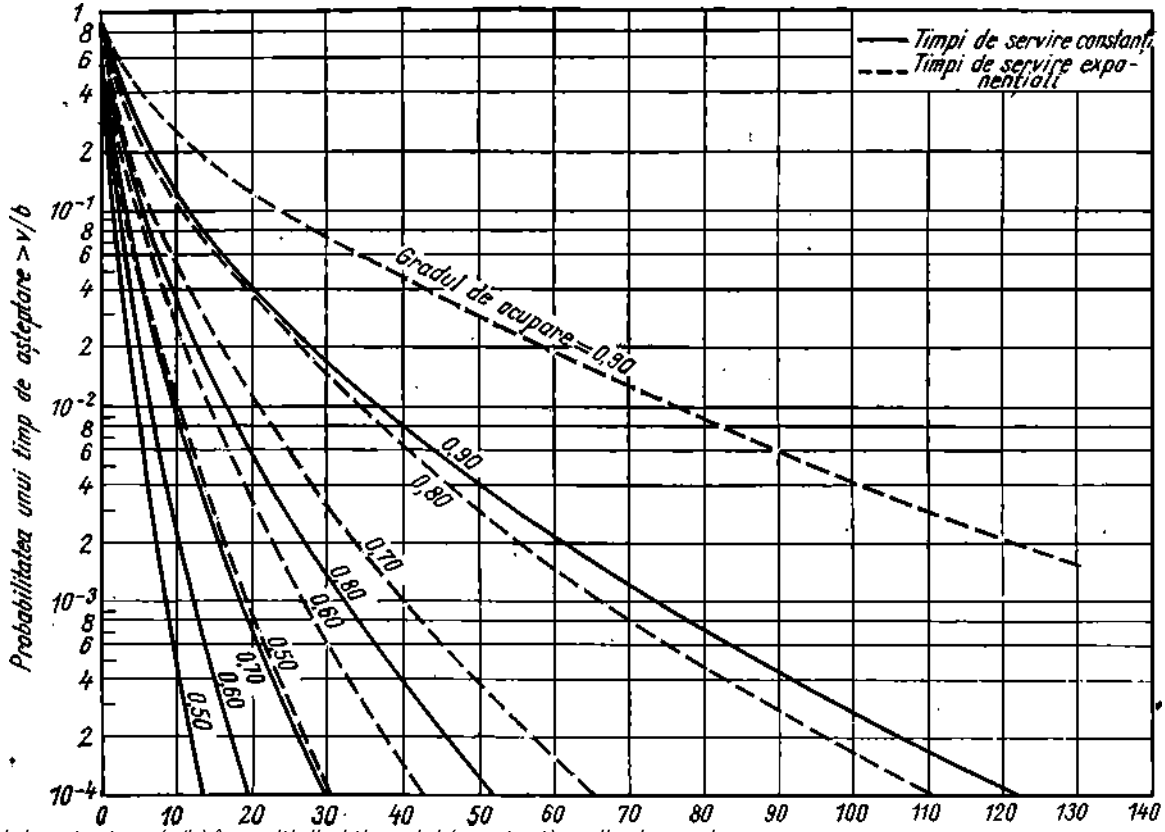
1.0.



lig. A‘2I>. Probabili la I cn aşteptării (a ocupării simultane a tuturor slaliilor de servire) pentru .1/(o?/CD).

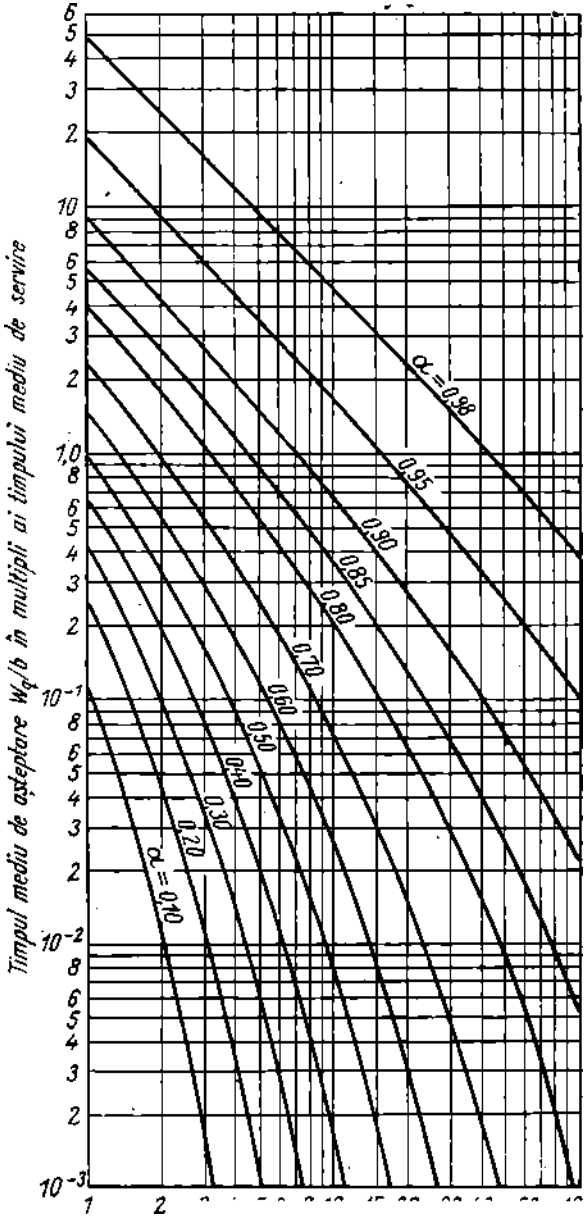


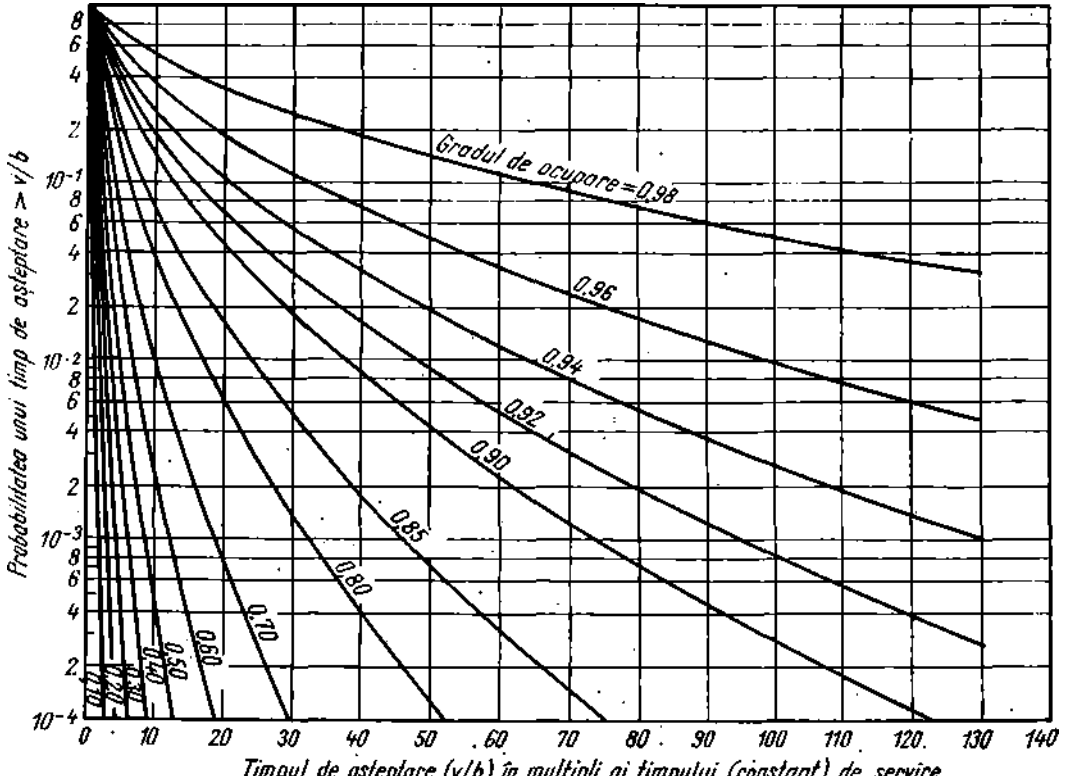
l-'ig. A2-7. *M/M/c* : (oo/SIBO): repartiţia timpilor de aşteptare pentru clienţii nevoili să aştepte.



Timpul de așteptare (v/b) în multipli ai timpului (constant)mediu de servire

l'ig. A2-4. Coinparaţic intre repartiţiile timpilor de aşteptare pentru *M/D/l* : (co/SIRO) şi M/A//1 : (co/SIRO).


Timpul mediu de așteptare W_q/b în multipli ai timpului mediu de servire
$\alpha = 0,99$
0,95
0,90
0,85
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
$\alpha = 0,10$



l ig. A2-2. A//D/: oo/ţFIFO): repartiţia timpului de aşteptare.

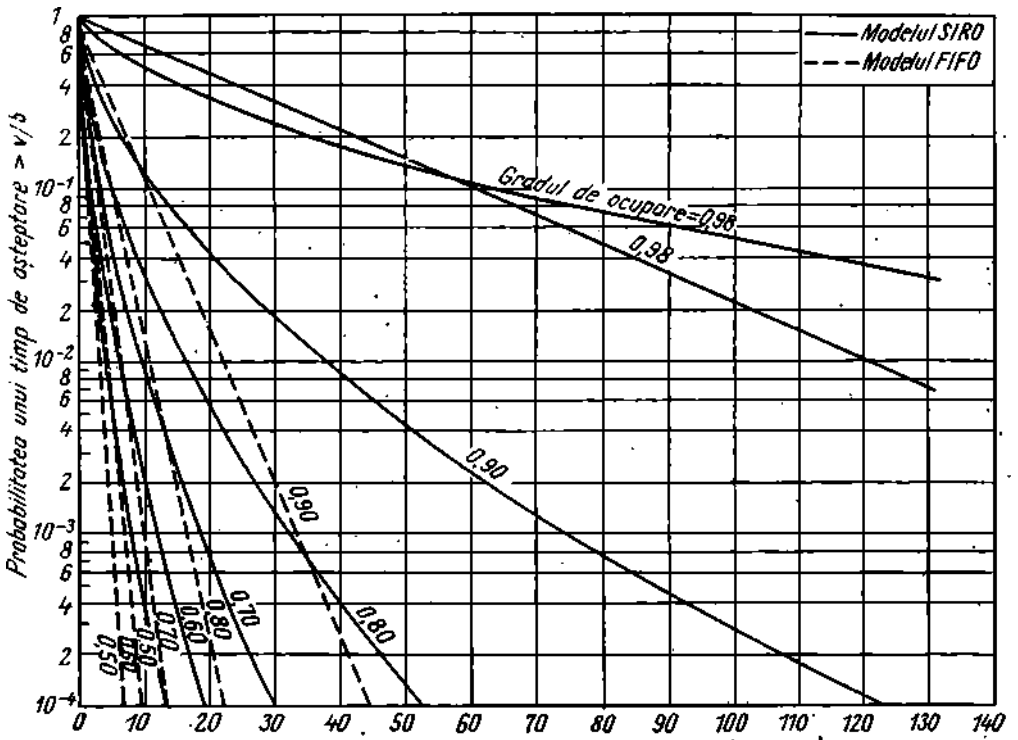


Fig. A2-3. Comparaţie intre repartiţiile timpilor de aşteptare corespunzătoare modelelor *M/D/l* : (oo/SIRO) şi *M/D/l* : (oo/FIFO).

BIBLIOGRAFIE

Lucrări citate de către autor:

1. **Cox, D. R.,** SMITH, **W. L.** ***Queues.*** **London, Methuen, 1960.**
2. SAATY. **T. L.** ***Elements of Queueing Theory with Applications.*** **New York, McGraw-Hill, 1961.**
3. MORSE, **P.** ***Queues, Inventories and Maintenance.*** **New York, Wiley, 1958.**
4. FELLER, **W.** ***An Introduciion to Probability Theory and its Applications.*** **New York, Wiley, 1957.**
5. KENDALL, **M. G.,** STUART, **A.** ***The Adoanced Theory of Statistics.*** **I New York, Hafner, 1958.**
6. WIDDER, **D. V.** ***The Laplace Transform.*** **Princeton, Princeton Univ. Press, 1949.**
7. TOCHER, **K. D.** ***The Art of Simulation.*** **London, English Univ. Press, 1963.**
8. OXENFELDT, **A. E.** (EDJ ***Models of Markets.*** **New York-London, Columbia Univ. Press, 1963.**
9. EDIE, **L. C.** ***Trafic Delays at Toii Booths.*** **în : Op. Research, voi. 2, br. 2, 1954.**
10. FRIEND, **J. E.** ***Two Studies in Airport Congestion.*** **în : Oper. Res. Quarterly, voi. 9, nr. 3, 1958.**
11. FRY, **J.,** JACKSON, **R. R. P.,** WELCH, **J. D.** ***Appointment Systems in Hospitals and General Practice.*** **în : Oper. Res. Quarterly, voi. 15, nr. 3, 1964.**
12. GEBHART, **R F. A** ***Limiting Distribution of an Estimate of Mean Queue Lenght.*** **în : Op. Research, voi. 11, nr. 6, 1963.**
13. LEE, **A. M.** ***Some Aspects of a Control and Communication Systems.*** **în : Oper. Res. Quarterly, voi. 10, nr. 4, 1959.**
14. LEE, **A. M.,** LINDER, **R. W.** ***Two Problems in Scheduling Manpower.*** **în: J. Canad. Oper, Res. Soc., voi. 3, nr. 1, 1965.**
15. LEE, **A. M.,** LONGTON, **P. A.** ***Queueing Processes Associated with Airline Passenger Check-in.*** **în : Oper. Res. Quarterly, voi. 10, nr. 1, 1959.**
16. MOLINA, **E. D.** ***Appltcation of the Theory of Probability to Telephone Trunking Pro blems.*** **în: Beli System Teleph. J., voi. 6, July, 1925.**
17. SHELTON, **J. R.** ***Solution Methods for Waiting Line Problems.*** **în: J. Industrial Eng., voi. 2, nr. 4, 1960.**
18. STILLSON, **P.** ***Implementation Problems in O.R.*** **în : Op Research, voi. 11, nr. 1, 1963.**
19. TOCHER, **K. D.** ***The Role of Models in Operaţional Research.*** **în : J. Royal Stat. Soc., Part II, 1961.**

20. WILKINSON, **R. I.** ***Working Curves for Delayed Exponenţial Calls Served in Random Order.*** **în : Beli System Teleph. J., voi. 34, 1960.**

Cititorul poate consulta, pentru explicarea noţiunilor teoretice utilizate, următoarele lucrări în limba română:

1. MIHOC, GH. **, Ciucu, G.** ***Introducere in teoria aşteptării.*** **Editura tehnică, Bucureşti, 1967.**

2. MIHOC, GH., CIUCU, **G.,** MUJA, **A.** ***Modele matematice ale aşteptării.*** **Bucureşti, Edi tura Academiei R.S.R., 1973.**

3. Ciucu, G. ***Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică.*** **Bucureşti, Edi tura didactică şi pedagogică, 1963.**

4. IOSIFESCU, **M.,** MIHOC, GH. **ş.a.** ***Teoria probabilităţilor şi statistica matematică.*** **Bucureşti, Editura tehnică, 1966.**

5. MIHOC, GH., CIUCU, **G.,** CRAIU, **V.** ***Teoria probabilităţilor şi statistică matematică.*** **Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1970.**

6. KAUFMANN, **A.** ***Metode şi modele ale cercetării operaţionale.*** **Voi. I, Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1967.**

CUPRINS

Prefaţă.....

1. INTRODUCERE.....

1.1. Problema oţelăriilor.....
1.2. Problema casei de bilete.....
1.3. Problema soţiei furioase.....
1.4. Natura sistemelor de aşteptare.....

2. MODELE ALE SISTEMELOR DE AŞTEPTARE.....

2.1. Generalităţi .....

2.2. Caracteristicile modelelor de aşteptare.....

3. MODELE CU O SINGURĂ STAŢIE DE SERVIRE.....

3.1. Generalităţi.....
3.2. Modele cu timpi de servire exponenţiali.....
3.3. Modele cu timpi de servire neesponenţiali.....
3.4. Modele cu timpul de servire constant.....
3.5. Reguli de priorităţi pentru disciplina de aşteptare.....
3.6. Comentariu general.....

4. MODELE CU MAI MULTE STAŢII DE SERVIRE.....

4.1. Modele.....
4.2. Fenomene de deplasare .....

5. Modele ale sistemelor seriale şi ciclice.....

5.1. Sisteme seriale.....
5.2. Sisteme ciclice .....

6. Tehnici de simulare .....

6.1. Metode Monte Carlo.....
6.2. Numere aleatoare şi pseudoaleatoare .....
6.3. Generarea variaţiilor aleatoare.....
6.4. Utilizarea simulărilor.....
6.5. Experimente de simulare .....
6.6. Concluzie.....

7. Natura soluţiilor operaţionale.....

8. Trei tipuri de aproximări.....

9. Sisteme de rezervare de locuri.....

9.1. Descrierea problemei .....
9.2. Prima fază.....

9.3. Interludiu **118**
9.4. Faza a doua **119**
9.5. Comentariu **123**

10. METODE DE CONTROL AL CĂLĂTORILOR **124**

10.1. Prima fază **125**
10.2. Faza a doua **134**
10.3. Studiul de validare **147**
10.4. Comentariu **152**

11. PROBLEMA SORTĂRII CUPOANELOR **153**

12. PATRU SITUAŢII SELECTATE **158**

12.1. Proiectarea reţelei de piste în aeroport **158**
12.2. Problema autobuzelor în aeroport **160**
12.3. Întîrzieri ale circulaţiei în punctele de vamă **161**
12.4. Sisteme de intîlnire **164**

13. PROIECTAREA SEDIULUI DIN LONDRA AL COMPANIEI BEA **166**

13.1. Prezentarea problemei **166**
13.2. Capacitatea locului de parcare **168**
13.3. împrăştierea pasagerilor ce părăsesc sediul **171**
13.4. încărcarea autobuzelor spre aeroport **180**

14. PROBLEME DE AŞTEPTARE ÎNTR-UN SISTEM DE CONTROL **186**

14.1. Prezentare a problemei **187**
14.2. Studiul preliminar **188**
14.3. Studiul principal: controlul plecărilor **190**

lo. O PROBLEMĂ A STANDARDELOR DE SERVIRE **195**

15.1. Prima fază **196**
15.2. Faza a doua **211**
15.3. Organizarea schimburilor **217**
15.4. Repartizarea personalului **219**
15.5. Comentariu **221**

16. CONCLUZII **223**

Anexa 1. LISTA PRINCIPALELOR SIMBOLURI **228**

Anexa 2. FORMULE ŞI GRAFICE UTILE **230**

Bibliografie **245**

Redactor: VALENTINA CREŢU
Tehnoredactor: ELENA GERU
Coperta şi supracoperta seriei: VALENTIN VIŞAN

Bun de tipar: 14.06.1976. Coli de tipar: 15,50. Tiraj: 5850 + 50 exemplare legate. C.Z.: 517.8:510.9.



**O. 182 I. P. INFORMAŢIA
Str. Brezolanu 23 — 25,
Bucureşti**